

САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА  
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

---

---

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ  
КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ  
ЗАОЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ  
**SAMRAS-2017**  
СРЕДИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ.  
ТУР № 2

---

---



Самара, 2017г.

## *Дорогие Друзья!*

Все задачи, представленные Вашему вниманию в данном релизе, являются оригинальными и составлены в соответствии с *Перечнем вопросов, рекомендуемых Центральной предметной методической комиссией Всероссийской олимпиады школьников по астрономии для подготовки обучающихся 10-11 классов к решению задач ее заключительного этапа.*

**При использовании материалов релиза ссылка на документ обязательна!**

Ссылка: «Условия и решения конкурсных задач заочной олимпиады по астрономии SAMRAS-2017 среди обучающихся 10-11 классов. Тур № 2». – <http://v937184r.bget.ru/SamRAS.htm>

*Автор задач – Филиппов Юрий Петрович*, научный руководитель школы, старший преподаватель кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева, к.ф.-м.н., методист СДДЮТ.

*Верстка в системе L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X* – Филиппов Ю.П., Белозерская Л.Н.

### **Памятка участника SamRAS-2017**

**1. Официальная страница Астрошколы:**

<http://v937184r.bget.ru/SamRAS.htm>

**2. Официальная группа в VK:** <http://vk.com/samrasolimp>

**3. Сроки подачи работ SamRAS-2017 тура № 2 на проверку:**  
**15.02.2017-30.04.2017!!!**

**4. Электронный ящик SamRAS-2017:** [samrasolimp@mail.ru](mailto:samrasolimp@mail.ru)

**5. Методические указания по решению задач заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2017:**

[http://v937184r.bget.ru/AstroSchool/Basic%20Documents/Guide-on-Tasks\[2017\]\\_SamRAS.pdf](http://v937184r.bget.ru/AstroSchool/Basic%20Documents/Guide-on-Tasks[2017]_SamRAS.pdf)

**ИЛИ**

[https://vk.com/doc-57032141\\_437742356](https://vk.com/doc-57032141_437742356)

---

---

# УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

---

---



**Дорогие Друзья!**

Прежде чем приступить к решению задач и оформлению отчета участника заочной олимпиады SamRAS-2017, внимательно ознакомьтесь с **«Методическими указаниями по решению задач заочной олимпиады по астрономии SamRAS-2017»!** Электронный адрес последних указан в **Памятке участника.**

## Уровень «Новичок» (уровень А)

### *Задача № 1. «Луна и созвездия»*

Условие. В каких из ниже представленных созвездий (Телец, Рыбы, Цефей, Орион, Секстант, Большая Медведица, Кентавр, Кит, Гидра, Змееносец) Луна не может прибывать в принципе? Свой ответ поясните. (1 балл за созвездие).

### *Задача № 2. «Классическая планета и самый большой спутник»*

Условие. У какой планеты в Солнечной системе есть самый большой (по размерам) спутник (среди всех спутников всех классических планет)? Как называется этот спутник? Можно ли его наблюдать в г. Самаре в настоящее время (февраль 2017 года)? (3 балла).

### *Задача № 3. «Колор равноденствий»*

Условие. Что такое колор равноденствий? На каком круге лежат его полюса? Нарисуйте небесную сферу и укажите на ней колор и его полюса. (3 балла).

### *Задача № 4. «Гитарист на фоне Солнца»*

На рис. 1 представлена фотография людей на фоне Солнца. Чем примечательна данная фотография с точки зрения астрономии? Оцените расстояние (относительно людей), с которого была сделана фотография, если рост мужчины с гитарой равен среднему росту ( $h = 178$  см) мужчины РФ. (4 балла).

### *Задача № 5. «Сила, препятствующая движению метеороида»*

Условие. При падении каменного метеороида на поверхность классической планеты последний, как правило, претерпевает действие силы, препятствующей ее движению. Какова природа этой силы? Запишите формулу, определяющую данную силу (для большого метеороида, диаметр которого есть  $O(1$  м)). В окрестности какой классической планеты Солнечной системы данная сила принимает а) максимальное значение? б) минимальное значение? (4 балла).



Рис. 1: Люди на фоне Солнца (автор – Nikunj Rawal).

### **Задача № 6. «Параллаксы Солнца»**

Определите параллакс Солнца, обусловленный а) движением Земли вокруг центра масс системы «Земля-Луна»; б) движением Луны вокруг той же точки. Какова площадь полосы небосвода, в пределах которой будет "блуждать" Солнце относительно эклиптики для земного наблюдателя, благодаря указанному движению? (5 баллов).

### **Уровень «Знаток» (уровень В)**

#### **Задача № 7. «Длина дуги видимой части суточной параллели звезды»**

**Условие.** Определите длину дуги суточной параллели звезды, соответствующей ее видимому движению над горизонтом, как функцию широты местности ( $\varphi$ ) и склонения светила ( $\delta$ ). (6 баллов).

#### **Задача № 8. «Видимость звезды и широта местности»**

**Условие.** Определите географическую широту ( $\varphi$ ) местности, на которой звезда, с склонением  $\delta = +45^\circ$  будет пребывать над горизонтом в течении 17



Рис. 2: Два серпа на дневном небосводе (источник – <https://vk.com/club71074290>).

часов? (7 баллов).

### **Задача № 9. «Эксперимент астрономов-любителей»**

**Условие.** Два астронома-любителя решили провести эксперимент. Они в степи Самарской области разбежались на максимальное расстояние, в пределах прямой видимости и стали светить друг другу одинаковыми светодиодными фонариками сотовых телефонов. Оцените звездную величину, которую будет иметь фонарик, с позиции второго наблюдателя, если его максимальная мощность в видимом свете равна 1 Вт. Сможет ли наблюдатель увидеть свет фонарика невооруженным глазом? Астрономы держали фонарики на уровне глаз, на высоте  $h = 1.8$  м над Землей. (8 баллов).

### **Задача № 10. «Два серпа на дневном небосводе»**

**Условие.** На рис. 2 представлена фотография Луны и нижней планеты с малой фазой. Определите, какая именно планета запечатлена на фотографии? Оцените фазу и фазовый угол данных тел. (8 баллов).

### **Задача № 11. «Высота приливного горба Луны»**

**Условие.** Оцените высоту приливного горба на поверхности Луны, обусловленного приливным действием Земли. Во сколько раз данная величина отличается от соответствующего значения для Земли? (9 баллов).

**№ 12. «Планеты-гиганты и спутник- "невидимка"»**

Определите, какие планеты-гиганты Солнечной системы могут иметь спутник, движущийся по круговой орбите, который при наблюдении с Земли всегда располагается по другую сторону от Солнца относительно материнской планеты, и во время каждого противостояния последней скрывается от земного наблюдателя? При решении задачи может оказаться полезным понятие радиуса сферы Хилла для планеты «1» и его величина, определяемая выражением вида

$$R_{\text{Hill}} = \Delta_{1-2} \left( \sqrt[3]{\frac{1 \mathfrak{M}_1}{3 \mathfrak{M}_2}} - \frac{1}{3} \sqrt[3]{\left(\frac{1 \mathfrak{M}_1}{3 \mathfrak{M}_2}\right)^2} - \frac{1}{9} \left(\frac{1 \mathfrak{M}_1}{3 \mathfrak{M}_2}\right) \right), \text{ при } \mathfrak{M}_1 \ll \mathfrak{M}_2. \quad (1)$$

здесь  $\Delta_{1-2}$  – расстояние между планетой 1 и массивным телом 2;  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$  – массы планеты и массивного тела. (10 баллов).

**Уровень «Профи» (уровень С)****Задача № 13. «Незаходящая Луна и заходящее Солнце»**

Определите возможные значения географической широты точек поверхности Земли (с учетом конечности размеров дисков данных тел и явления рефракции), для которых Солнце всегда является восходящим и заходящим светилом, а Луна – незаходящим (по крайней мере 24 часа). (11 баллов).

**Задача № 14. «Изменение поверхностной яркости Солнца»**

Условие. Определите, на сколько процентов изменится поверхностная яркость Солнца на горизонте относительно его положения в зените (для наблюдателя в тропиках) в силу феномена а) рефракции света? б) поглощения света атмосферой Земли? в) в результате одновременного влияния двух факторов? При решении задачи могут оказаться полезными следующие эмпирические формулы:

1. **Беннетта** для определения величины рефракции  $\delta h$  (в угловых минутах) в зависимости от видимой высоты светила  $h_a$  (в градусах):

$$\delta h = \text{ctg} \left( \frac{h_a}{1^\circ} + \frac{7.31^\circ}{h_a + 4.4^\circ} \right), \quad (2)$$

2. **Смардсона** для определения величины рефракции  $\delta h$  (в угловых минутах) в зависимости от истинной высоты светила  $h_0$  (в градусах):

$$\delta h = 1.02 \cdot \text{ctg} \left( \frac{h_0}{1^\circ} + \frac{10.3^\circ}{h_0 + 5.1^\circ} \right). \quad (3)$$

3. **Кастена-Янга** для определения интенсивности ( $\mathcal{I}_{vis}$ ) света от небесного источника у поверхности Земли, регистрируемого наблюдателем:

$$\mathcal{I}_{vis} = \mathcal{I}_0 P^M(z), \quad \text{где} \quad (4)$$

$$M(z) = \frac{1}{\cos z + 0.50572 (96.07995 - z)^{-1.6364}}, \quad (5)$$

здесь  $\mathcal{I}_0$  – интенсивность света того же источника на верхней границе атмосферы;  $P$  – коэффициент прозрачности атмосферы (в нашем случае следует принять  $P = 0.75$ ),  $M(z)$  – **воздушная масса** – отношение оптической толщины атмосферы, проходимой лучами света от источника при его зенитном расстоянии  $z$  (в градусах), к оптической толщине, проходимой при положении источника в зените ( $z = 0^\circ$ ), определяемая формулой (4). Следует полагать, что видимая звездная величина Солнца в зените ( $z = 0^\circ$ ), равна  $m_V^{(0)} = -26.74^m$ . (12 баллов).

### Задача № 15. «Кульминации тройной звезды»

В некотором населенном пункте северного полушария Земли наблюдалась тройная звезда в верхней и нижней кульминациях. В верхней кульминации первая компонента кульминировала к югу от зенита, вторая – точно в зените, третья – к северу от зенита, причем все звезды прошли через меридиан одновременно 23 сентября в 00 часов 20 минут по местному среднему солнечному времени. Из наблюдений удалось определить угловое расстояние между компонентами 1 и 3 –  $d_{13} = 8'$ . В нижней кульминации первая из компонент оказалась под горизонтом, вторая – точно на горизонте, а третья – над горизонтом, на высоте  $h_3 = 5'$ . Определите широту места наблюдения и экваториальные координаты звезд. (13 баллов).

### Задача № 16. «Уравнение для масс двух гравитирующих тел»

**Условие.** Докажите, что для двух гравитирующих тел, движущихся вокруг общего центра масс по эллиптическим орбитам с большими полуосями  $a_1, a_2$ , отношение их масс есть

$$\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2} = \frac{a_2}{a_1}. \quad (6)$$

При доказательстве может оказаться полезным уравнение эллипса в полярных координатах. (13 баллов).

### Задача № 17. «Критическая светимость и предельная масса звезды»

**Условие.** Получите аналитические выражения для критической светимости и предельной массы звезды, для которых еще выполняется баланс сил

давления электромагнитного излучения и силы притяжения. Выполните численную оценку результатов и представьте последний в массах Солнца. (14 баллов).

**Задача № 18. «Некоторые свойства двойной звезды Сириус»**

**Условие.** На рис. 3 представлены траектории видимого движения компонент (А и В) двойной звезды Сириус.

1. По видимым положениям Сириуса и его спутника определите период обращения ( $P$ ) звезд вокруг их общего центра масс.

2. Для указанных на рисунке моментов времени измерьте видимые расстояния  $x_1$  и  $x_2$  Сириуса и его спутника относительно траектории видимого движения их центра масс. Определите для каждого  $i$ -го случая  $(x_2/x_1)_i$ , а затем найдите среднее значение отношения  $\langle x_2/x_1 \rangle$ . С использованием результатов решения задачи № 16 настоящего релиза, вычислите отношение больших полуосей  $a_2/a_1$  орбит данных звезд.

3. С использованием третьего обобщенного закона Кеплера вычислите сумму масс Сириуса и его спутника, отношение их масс по формуле (6) и массу каждой компоненты системы "Сириус". Следует учесть, что максимальное видимое угловое расстояние между компонентами равно  $a'' = 7.62''$ , а параллакс звезды –  $\pi'' = 0.377''$ .

4. По видимым звездным величинам звезд (Сириус А –  $m_1 = -1.43^m$ , Сириус В –  $m_2 = +8.6^m$ ), вычислите их абсолютные визуальные звездные величины  $M_V$ .

5. По спектральному классу звезд (Сириус А – А1, Сириус В – А5), с использованием данных раздела «Справочные данные», найдите болометрическую поправку и вычислите болометрическую абсолютную звездную величину ( $M_b$ ) и светимость ( $L$ ).

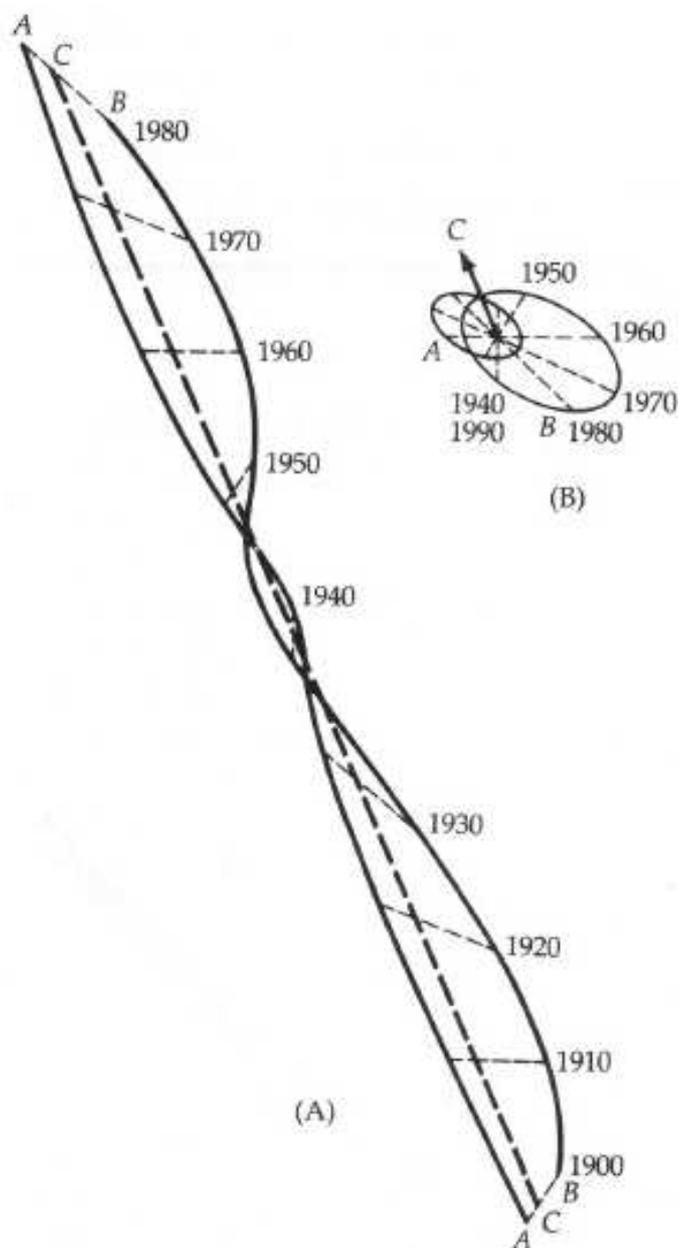


Рис. 3: Траектории видимого движения компонент (А и В) системы "Сириус".

6. Вычислите среднюю плотность звезд системы «Сириус» с использованием значений их радиусов  $\mathfrak{R}_1 = 1.711 \mathfrak{R}_\odot$ ,  $\mathfrak{R}_2 = 0.0084 \mathfrak{R}_\odot$ , где  $\mathfrak{R}_\odot$  – радиус Солнца. Что вы можете сказать о плотности Сириуса В? Какова причина обнаруженной особенности? (15 баллов).

---

---

---

---

---

# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

---

---



## Уровень «Новичок» (уровень А)

### Задача № 1. «Луна и созвездия»

**Решение.** Как известно, наклонение орбиты Луны к плоскости эклиптики составляет  $i_{\zeta} = 5^{\circ}9'$ , при этом сама орбита поворачивается относительно оси эклиптики с течением времени. Следовательно, Луна может пребывать в полосе шириной  $2i_{\zeta}$ , срединной линией которой является эклиптика. С использованием карты звездного неба легко убедиться, что в данную полосу не попадают следующие созвездия – Большая Медведица, Цефей, Кентавр, Гидра. Следовательно, в данных созвездиях Луна не может быть, в принципе.

**Ответ:** Большая Медведица, Цефей, Кентавр, Гидра. (1 балл за созвездие).

### Задача № 2. «Классическая планета и самый большой спутник»

**Решение.** В Солнечной системе самым крупным спутником обладает Юпитер. Данный спутник именуется Ганимедом. В настоящее время (февраль 2017 года) данный спутник можно наблюдать в г. Самаре после полуночи и до восхода Солнца, что определяется периодом видимости материнской планеты.

**Ответ:** Юпитер; Ганимед; его можно наблюдать в г. Самаре в настоящее время. ( $\$_{\max} = 3$  балла).

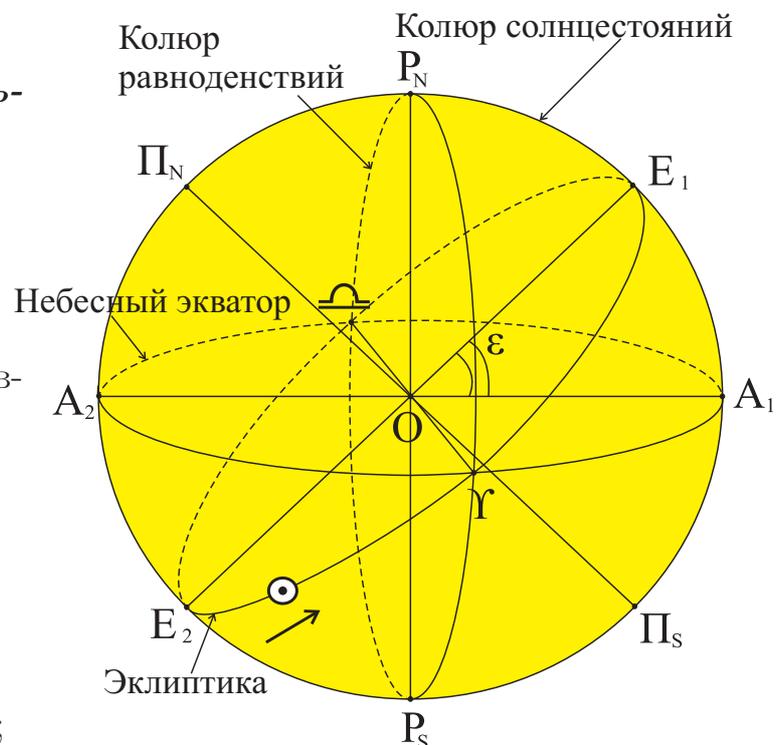


Рис. 4: к определению колюра равноденствий.

### Задача № 3. «Колюр равноденствий»

**Решение.** Колюр равноденствий – это большой круг небесной сферы ( $P_N \cap P_S \cap \text{---}$ ), круг склонений, проходящий через точки весеннего ( $\Upsilon$ ) и осеннего ( $\text{---}$ ) равноденствия (см. рис. 4). Полюсами данного круга являются точки ( $A_1$  и  $A_2$ ), отстоящие на  $90^{\circ}$  от всех точек данного круга. Очевидно, данные точки должны лежать на пересечении небесного экватора и колюра солнцестояний. ( $\$_{\max} = 3$  балла).

### Задача № 4. «Гитарист на фоне Солнца»

**Решение.** С точки зрения астрономии данная фотография примечательна тем, что она получена во время транзита нижней планеты по диску Солнца.

В подтверждение этому на данной фотографии, на фоне диска центрального светила виден маленький черный кружок. Определим угловой масштаб данной фотографии:

$$\mu_a = \frac{D''_{\odot}}{d_{\odot}} = 7.9''/\text{мм}, \quad (7)$$

здесь  $D''_{\odot} = 32'$  – угловой диаметр Солнца,  $d_{\odot} = 243$  мм – линейный диаметр диска Солнца, определенный по фотографии (Ваше значение может отличаться от выше указанного, если Вы используете фотографию иного масштаба). Определим по фотографии видимый диаметр черного диска транзитной планеты –  $\ell_p = 1.5$  мм. Определим угловой диаметр планеты:

$$D''_p = \mu_a \ell_p = 11.9'', \quad (8)$$

С другой стороны, угловой диаметр нижней планеты в нижнем соединении представляется в виде:

$$D''_p = \frac{2 \mathfrak{R}_p}{(r_{\oplus} - r_p)} \times 206265''. \quad (9)$$

здесь  $r_{\oplus}, r_p$  – гелиоцентрические расстояния Земли и нижней планеты в указанный момент. Поскольку орбиты планет являются эллиптическими, то угловой диаметр планеты будет минимальным в случае, когда Земля находится в своем афелии, а планета – в перигелии, т.е.

$$D''_{p \min} = \frac{2 \mathfrak{R}_p}{a_{\oplus}(1 + \varepsilon_{\oplus}) - a_p(1 - \varepsilon_p)} \times 206265''. \quad (10)$$

Аналогично рассуждая, можно определить максимальное значение углового диаметра планеты:

$$D''_{p \max} = \frac{2 \mathfrak{R}_p}{a_{\oplus}(1 - \varepsilon_{\oplus}) - a_p(1 + \varepsilon_p)} \times 206265''. \quad (11)$$

Последняя ситуация достигается, когда Земля находится в перигелии, а планета – в афелии своей орбиты. В случае Меркурия и Венеры данный параметр принимает следующие предельные значения:

$$D''_{\text{♀} \min} = 9.5'', \quad D''_{\text{♀} \max} = 13.0'', \quad (12)$$

$$D''_{\text{♁} \min} = 55.9'', \quad D''_{\text{♁} \max} = 65.4''. \quad (13)$$

Из сопоставления интервалов (12)-(13) возможных значений углового диаметра нижних планет в нижнем соединении и результата (8), определенного по рисунку, приходим к заключению, что на фотографии запечатлен транзит Меркурия. Определим по рисунку рост человека  $\ell_h = 194$  мм. Далее определим угловой размер, соответствующий росту человека с гитарой:

$$d''_h = \mu_a \cdot \ell_h = 1533'' = 25.55'.$$

Под таким углом человека можно увидеть с значительного расстояния  $r$ , определяемого соотношением вида:

$$r = \frac{h}{2 \operatorname{tg}(d_h/2)} \approx \frac{h}{d_h''} \times 206265'' = 240 \text{ м.}$$

**Ответ:** на фотографии запечатлен транзит Меркурия;  $r = 240$  м. ( $\$_{\max} = 4$  балла).

**Задача № 5. «Сила, препятствующая движению метеороида»**

**Решение.** При движении метеороида вблизи поверхности планеты, данное тело, как правило, испытывает действие силы сопротивления со стороны атмосферы планеты. Данная сила, в общем случае, может быть представлена в виде:

$$F_d = \frac{1}{2} C_d S \rho V^2, \quad (14)$$

где  $C_d$  – безразмерный коэффициент сопротивления, зависящий от геометрии метеороида;  $S$  – площадь поперечного сечения данного тела;  $\rho$  – массовая плотность воздуха,  $V$  – скорость данного тела относительно атмосферы.

**Необходимым условием возникновения ненулевой силы сопротивления** является наличие атмосферы у планеты (в этом случае плотность газа отлична от нуля) и движение данного тела с ненулевой скоростью относительно среды (атмосферы). Среди всех классических планет лишь у Меркурия нет атмосферы, следовательно, у его поверхности сила сопротивления будет минимальна и равна нулю.

Максимальное значение силы сопротивления, очевидно, следует ожидать вблизи поверхности планеты, плотность атмосферы которой является высокой, и скорость падения на которую является наибольшей. Среди планет земной группы именно Венера обладает атмосферой с наибольшей плотностью. Среди планет-гигантов наиболее массивной и плотной атмосферой обладает Юпитер. Метеороиды традиционно являются продуктами разрушения комет, которые двигались по сильно вытянутым орбитам, афелий которых традиционно расположен далеко за орбитами классических планет. Ради простоты рассуждений будем полагать, что метеороид приходит из бесконечности. Следовательно, гелиоцентрическую скорость ( $V$ ) метеороида массы  $m$  можно выразить из закона сохранения энергии:

$$\frac{1}{2} m V^2 - \frac{G m \mathcal{M}_{\odot}}{r} - \frac{G m \mathcal{M}_p}{\mathcal{R}_p} = 0, \Rightarrow V = \sqrt{2G \left( \frac{\mathcal{M}_{\odot}}{r} + \frac{\mathcal{M}_p}{\mathcal{R}_p} \right)},$$

где  $\mathcal{M}_{\odot}$ ,  $\mathcal{M}_p$  – масса Солнца и планеты соответственно;  $r$  – гелиоцентрическое расстояние планеты;  $\mathcal{R}_p$  – радиус планеты. При этом гелиоцентрическая

скорость самой планеты в приближении круговой орбиты представляется в виде:

$$V_p = \sqrt{\frac{G m_\odot}{r}}.$$

Согласно закону сложения скоростей, скорость падения метеороида на планету (относительно последней) должна быть заключена в интервале:

$$V - V_p \leq V' \leq V + V_p,$$

Вычисляя возможные значения скорости падения метеороида, в результате получаем для Венеры и Юпитера следующие интервалы возможных значений:

$$15.58 \text{ км/с} \leq V'_\oplus \leq 85.63 \text{ км/с}, \quad 49.28 \text{ км/с} \leq V'_{\text{Ю}} \leq 75.40 \text{ км/с}.$$

При падении метеороида в атмосфере с определенной плотностью, сила сопротивления будет больше там, где больше скорость падения, следовательно, наибольшую силу сопротивления будет испытывать метеороид у поверхности Венеры.

**Ответ:** выражение для силы представлено формулой (14); природа данной силы обусловлена механическим действием встречных потоков атмосферного газа на движущийся метеороид; в окрестности Меркурия данная сила минимальна и равна нулю; в окрестности Венеры данная сила принимает максимальное значение. (\$\_{\text{max}} = 4\$ балла).

### Задача № 6. «Параллаксы Солнца»

**Решение:** Как известно, система «Земля-Луна» движется относительно общего центра масс в результате взаимного гравитационного притяжения. Именно центр масс движется по эллиптической орбите вокруг Солнца в течение года. Определим большие полуоси эллиптических орбит, по которым движутся центры Земли и Луны относительно их центра масс. Для этого воспользуемся определением радиуса-вектора центра масс:

$$\vec{\mathcal{R}}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (15)$$

Перейдем в систему отсчета, начало которой совпадает с центром масс данной пары тел, тогда  $\vec{\mathcal{R}}_c = 0$ , следовательно

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{a_2}{a_1}. \quad (16)$$

При записи последнего равенства мы учли, что полярный радиус-вектор небесного тела пропорционален большой полуоси его эллиптической орбиты (см. решение задачи № 16 настоящего релиза). Учитывая так же, что

$$a_1 + a_2 = a_0, \quad (17)$$

в результате получаем

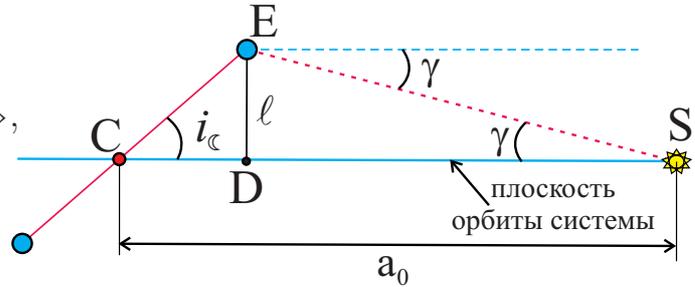
$$a_1 = \left( \frac{\eta}{1 + \eta} \right) a_0, \quad a_2 = \left( \frac{1}{1 + \eta} \right) a_0, \quad \text{где } \eta = \frac{m_2}{m_1}. \quad (18)$$

Полагая далее, что «1» – **Земля** ( $\oplus$ ), а «2» – **Луна** ( $\zeta$ ), в итоге получаем

$$\bar{a}_{\oplus} = 4671 \text{ км}, \quad \bar{a}_{\zeta} = 379728 \text{ км}, \quad \text{где } \eta = 1.23 \cdot 10^{-2}. \quad (19)$$

а) Параллакс Солнца, обусловленный движением Земли вокруг центра масс системы «Земля-Луна», есть

$$P''_{\oplus} = \frac{\bar{a}_{\oplus}}{a_0} \cdot 206265'' = 6.4'', \quad (20)$$



где  $a_0 = 149597870$  км – большая полуось орбиты системы относительно Солнца.

Рис. 5: к определению площади полосы небосвода, в пределах которой будет "блуждать" Солнце относительно эклиптики.

б) Параллакс Солнца, обусловленный движением Луны вокруг центра масс системы «Земля-Луна», равен

$$P''_{\zeta} = \frac{\bar{a}_{\zeta}}{a_0} \cdot 206265'' = 523.6'' = 8.7'. \quad (21)$$

Как известно, наклонение плоскости орбит системы «Луна-Земля» равен  $i_{\zeta} = 5^{\circ}9'$  (как у орбиты Луны относительно центра Земли). Следовательно, центр Земли может подниматься выше (ниже) плоскости эклиптики на величину, не превышающую

$$l = \bar{a}_{\oplus} \cdot \sin i_{\zeta} = 419.3 \text{ км}.$$

При этом Солнце для земного наблюдателя сместится на угол  $\gamma$ , для которого можно записать

$$\sin \gamma = \frac{l}{a_0 - \bar{a}_{\oplus} \cos i_{\zeta}} \approx \left( \frac{\bar{a}_{\oplus}}{a_0} \right) \sin \gamma_{\zeta}.$$

Очевидно, что угол  $\gamma$  является малым, следовательно,

$$\gamma \approx \left( \frac{\bar{a}_{\oplus}}{a_0} \right) \cdot \sin i_{\zeta} = 2.803 \cdot 10^{-6} \text{ рад} = 0.578''. \quad (22)$$

Следовательно, площадь (угловая) полосы небосвода, в пределах которой будет «блуждать» Солнце относительно эклиптики, есть

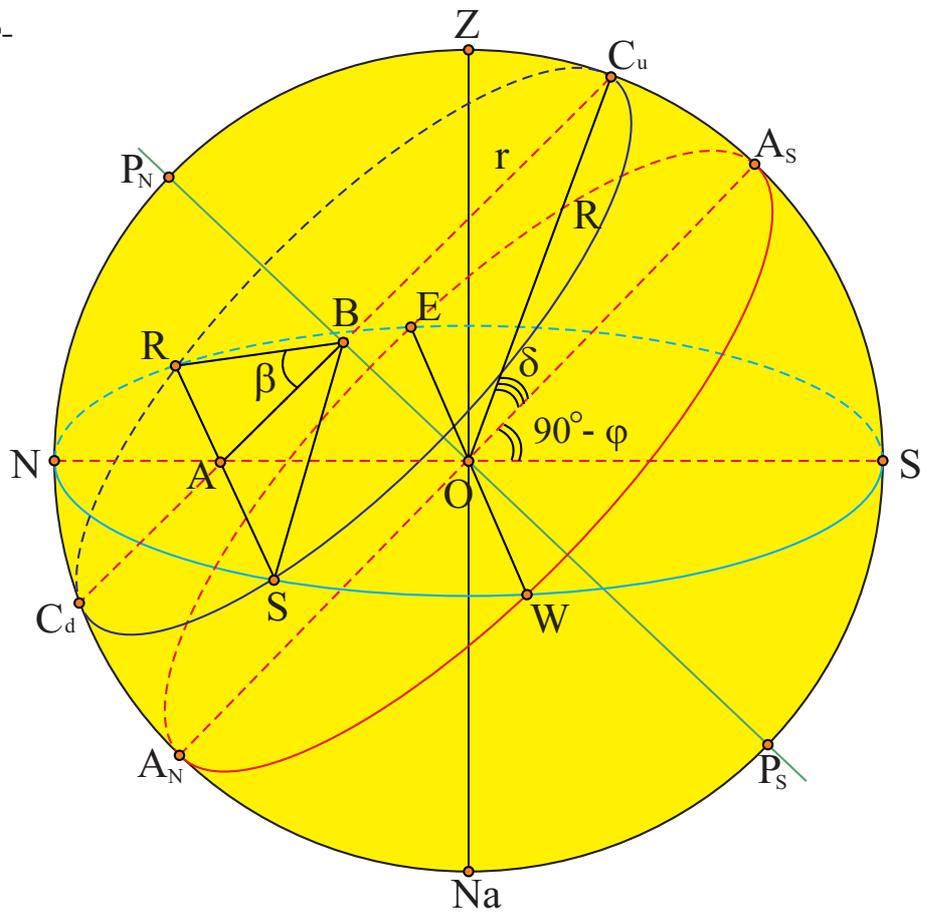
$$S_{\odot} = 2\pi \cdot (2\gamma) = 3.52 \cdot 10^{-5} \text{ срад} = 0.12 \text{ кв.град}. \quad (23)$$

**Ответ:**  $P''_{\oplus} = 6.44''$ ;  $P''_{\zeta} = 524'' = 8.7'$ ;  $S_{\odot} = 0,12$  кв.град. (5 баллов).

## Уровень «Знаток» (уровень В)

**Задача № 7.** «Длина дуги видимой части суточной параллели звезды»

**Решение.** Рассмотрим суточное движение звезды (со склонением  $\delta$ ) по небосводу (см. рис. 6) вдоль суточной параллели  $RC_uSC_d$ , для наблюдателя, находящегося в северном географическом полушарии, на широте  $\varphi$  ( $\varphi > 0$ ). Звезда восходит над горизонтом в точке  $R$ , поднимается выше и кульминирует в точке  $C_u$ , затем опускается и заходит за горизонт в точке  $S$ . Далее ее суточное движение по небосводу



продолжается по дуге  $SC_dR$ , скрытой от глаз наблюдателя, находящегося в точке  $O$  – центре небесной сферы. Т.о. нам необходимо определить угловую меру  $\ell$  дуги  $RC_uS$ . Из рисунка видно, дугу можно представить в виде:

$$\ell = 360^\circ - 2\beta. \quad (24)$$

где  $\beta$  – угол прямоугольного треугольника  $\Delta ARB$ . Последний можно определить следующей формулой:

$$\cos \beta = \frac{AB}{RB} = \frac{OB \operatorname{ctg} \angle BAO}{r} \quad (25)$$

здесь  $r = RB = BC_u$  – радиус суточной параллели звезды, который можно легко определить из  $\Delta OC_uB$ :

$$r = R \cos \delta, \quad (26)$$

здесь  $R$  – радиус небесной сферы,  $\delta$  – склонение звезды.  $OB$  можно выразить из того же треугольника

$$OB = R \sin \delta.$$

Из рис. 6 нетрудно видеть, что  $\angle BAO = \angle A_s OS = 90^\circ - \varphi$ . В итоге  $\cos \beta$  можно представить в виде:

$$\cos \beta = \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{при } |\delta| \leq |90^\circ - \varphi|. \quad (27)$$

При  $\delta > 90^\circ - \varphi$ , суточная параллель звезды целиком лежит над горизонтом ( $\ell = 360^\circ$ ). При  $\delta < -(90^\circ - \varphi)$  – суточная параллель лежит полностью под горизонтом ( $\ell = 0^\circ$ ). Следовательно, итоговое выражение для длины дуги видимой части суточной параллели звезды (в северном полушарии) можно записать так:

$$\ell = \left\{ \begin{array}{ll} 360^\circ, & \text{при } \delta > 90^\circ - \varphi, \\ 360^\circ - 2 \arccos(\operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \varphi), & \text{при } |\delta| \leq |90^\circ - \varphi|, \\ 0^\circ, & \text{при } \delta < -(90^\circ - \varphi) \end{array} \right\}. \quad (28)$$

В случае наблюдателя, находящегося в южном географическом полушарии ( $\varphi < 0$ ), ответ для  $\ell$  следует представить так

$$\ell = \left\{ \begin{array}{ll} 360^\circ, & \text{при } \delta < -(90^\circ + \varphi), \\ 360^\circ - 2 \arccos(\operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \varphi), & \text{при } |\delta| \leq |90^\circ + \varphi|, \\ 0^\circ, & \text{при } \delta > 90^\circ + \varphi \end{array} \right\}. \quad (29)$$

**Ответ:** к задаче представлен выражениями (28)-(29). (6 баллов).

### Задача № 8. «Видимость звезды и широта местности»

Дано:

$$\delta = +45^\circ,$$

$$\Delta t_{\text{vis}} = 17 \text{ ч.}$$

Найти:

$$\varphi - ?$$

Решение:

Как известно, небесная сфера вращается вокруг оси мира с угловой скоростью  $\omega_{\oplus} = 15^\circ/\text{час}$ , равной средней угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси. За время  $\Delta t_{\text{vis}}$  звезда опишет видимую дугу суточной параллели длиной

$$\ell = \omega_{\oplus} \cdot \Delta t_{\text{vis}}. \quad (30)$$

Далее воспользуемся результатом предыдущей задачи в случае  $\delta \leq 90^\circ - \varphi$  и  $\varphi > 0$ . В этом случае

$$2\pi - 2 \arccos[\operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \varphi] = \omega_{\oplus} \Delta t_{\text{vis}}, \Rightarrow \arccos[\operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \varphi] = \pi - \omega_{\oplus} \Delta t_{\text{vis}}/2, \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos[\pi - \omega_{\oplus} \Delta t_{\text{vis}}/2]}{\operatorname{tg} \delta},$$

откуда следует выражение для широты местности:

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \left[ \frac{\cos(\omega_{\oplus} \Delta t_{\text{vis}}/2)}{\operatorname{tg} \delta} \right] = 31.3^\circ. \quad (31)$$

**Ответ:** к задаче представляется результатом (31). (7 баллов).

**Задача № 9. «Эксперимент астрономов-любителей»**

**Решение.** Прежде всего определим максимальное расстояние между астрономами-любителями. Согласно рис. 7, искомое расстояние  $AB = 2AC$ . Последний отрезок можно легко определить по т. Пифагора для прямоугольного треугольника  $\triangle ACO$ . В результате получаем

$$\begin{aligned}\Delta &= 2\sqrt{(\mathfrak{R}_{\oplus} + h)^2 - \mathfrak{R}_{\oplus}^2} \approx \\ &\approx 2\sqrt{2\mathfrak{R}_{\oplus}h} = 9.56 \text{ км.}\end{aligned}$$

Освещенность, создаваемая светодиодным фонариком на расстоянии  $\Delta$  (в предположении, что излучение высвечивается в полусфере), есть

$$E = \frac{P}{2\pi\Delta^2}.$$

Учитывая, что звезда с нулевой звездной величиной ( $m_0 = 0^m$ ) создает освещенность на сетчатке наблюдателя  $E_0 = 2.48 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2$ , с использованием формулы Погсона можно определить звездную величину фонарика в точке, где находится второй астроном

$$m - m_0 = -2.5 \lg\left(\frac{E}{E_0}\right), \Rightarrow m = 2.5 \lg\left(\frac{E_0}{E}\right) = 2.5 \lg\left(\frac{2\pi\Delta^2 E_0}{P}\right) = 2.9^m.$$

Последнее значение больше предельной звездной величины ( $6^m$ ) самых тусклых звезд, видимых невооруженным глазом, следовательно, астроном сможет увидеть фонарик коллеги с расстояния  $\Delta$ .

**Ответ:** сможет увидеть свет фонарика невооруженным глазом. ( $\$_{\max} = 8$  баллов).

**Задача № 10. «Два серпа на дневном небосводе»**

**Решение.** Очевидно, что на фотографии рис. 2 запечатлены Луна и нижняя планета вблизи новолуния и нижнего соединения соответственно. Для того чтобы понять какая именно планета (Венера или Меркурий) запечатлена на фотографии, необходимо оценить угловой диаметр нижней планеты в момент создания фотографии. Для этого учтем, что планета и Луна в одинаковых фазах, следовательно, серп Луны подобен серпу нижней планеты.

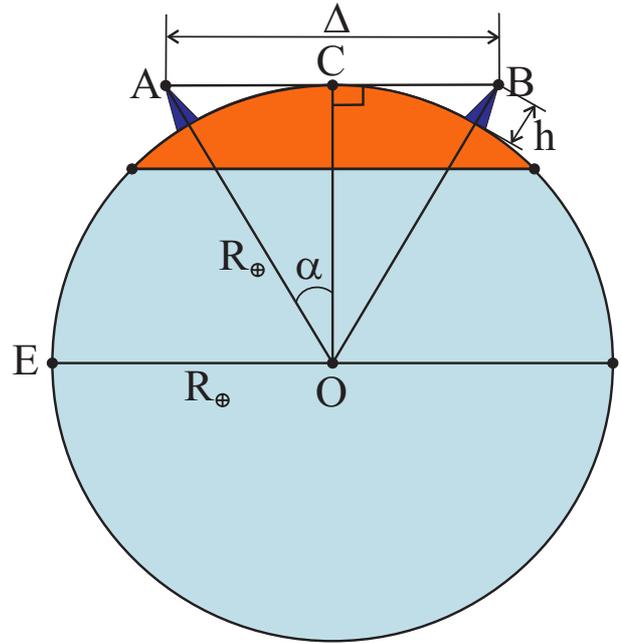


Рис. 7: к определению расстояния между астрономами.

Тогда отношение линейных размеров этих серпов должно быть равно отношению угловых диаметров их дисков:

$$\frac{L_{\zeta}}{L_p} = \frac{D''_{\zeta}}{D''_p} \Rightarrow D''_p = D''_{\zeta} \left( \frac{L_p}{L_{\zeta}} \right), \text{ где } D''_{\zeta} = 32'. \quad (32)$$

В качестве величины  $L$  серпа будет использовать расстояние между его вершинами (см. рис. 8). Данные параметры, измеренные по фотографии, равны  $L_p = 5$  мм,  $L_{\zeta} = 170$  мм соответственно (Ваше значения могут отличаться от указанных, если Вы используете фотографию иного масштаба). Следовательно, согласно (32) угловой диаметр планеты равен  $D''_p = 56.5''$ . Поскольку планета находится вблизи нижнего соединения, то ее угловой диаметр можно записать в виде:

$$D''_p = \frac{2\mathfrak{R}_p}{(a_{\oplus} - a_p)} \cdot 206265''. \quad (33)$$

здесь  $\mathfrak{R}_p$  – линейный радиус планеты,  $a_{\oplus}$ ,  $a_p$  – большие полуоси орбит Земли и планеты.

В задаче № 4 настоящего релиза были вычислены интервалы возможных значений углового диаметра Меркурия и Венеры в нижнем соединении. Данные интервалы определяются выражениями (12)-(13). Из сопоставления полученных результатов приходим к заключению, что нижней планетой является Венера. Определим фазу данных тел, что проще сделать по видимому серпу Луны. По определению **фазой планеты** называется отношение площади освещенной части диска к площади всего диска планеты.

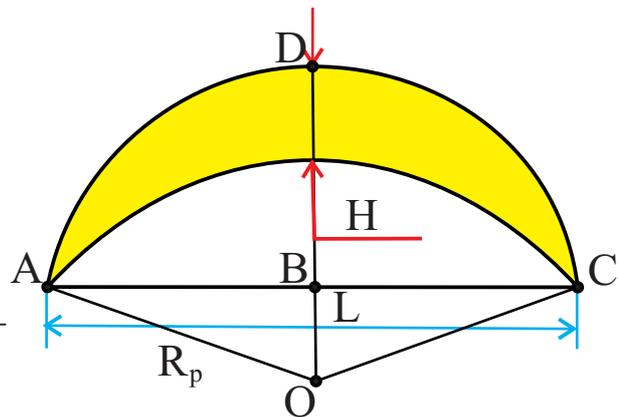


Рис. 8: к определению фазы Луны.

$$\Phi = \frac{S_{\text{осв}}}{S_{\text{полн}}} \quad (34)$$

Можно показать, что данную величину можно свести к отношению ширины серпа  $H$  планеты (см. рис. 3) к диаметру планеты  $D_p$ , определенному по фотографии:

$$\Phi = \frac{H}{D_p}. \quad (35)$$

Для Луны  $H = 8$  мм (Ваше значение может отличаться от указанного при использовании фотографии в ином масштабе).

Для определения  $D_p$  будем использовать следующую методику. Соединим на рисунке вершины серпа Луны  $A$  и  $C$  прямой. Найдем центр отрезка  $AC$ ,

точку  $B$ . Проведем через нее прямую  $DB$ , перпендикулярную  $AB$ . Данная прямая обязательно должна пройти через центр диска Луны – точку  $O$ . Для прямоугольного треугольника  $\triangle OAB$  воспользуемся теоремой Пифагора:

$$R_p^2 = AB^2 + OL^2 = \left(\frac{L\zeta}{2}\right)^2 + (R_p - DB)^2, \Rightarrow R_p = \frac{1}{2h} \left(h^2 + \frac{L\zeta^2}{4}\right),$$

следовательно,

$$D_p = 2R_p = h + \frac{L\zeta^2}{4h}, \text{ где, } h = DB. \quad (36)$$

Измеряя последнюю величину по рисунку ( $h = 55$  мм), в результате получаем  $D_p = 186$  мм, а фаза Луны и Венеры, согласно (35), есть  $\Phi = 0.04$ . Связь фазы ( $\Phi$ ) и фазового угла ( $\varphi$ ) представляется в виде:

$$\Phi = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi), \quad (37)$$

откуда следует значение  $\varphi$ :

$$\varphi = \arccos[2\Phi - 1] = 156^\circ. \quad (38)$$

**Ответ:** на фотографии представлена Венера;  $\Phi = 0.04$ ;  $\varphi = 156^\circ$ . ( $\$_{\max} = 8$  баллов).

### Задача № 11. «Высота приливного горба Луны»

**Решение.** В теории приливного взаимодействия высоту приливного горба традиционно отождествляют с *амплитудой статической деформации* ( $\delta a$ ). Вычислим данный параметр для поверхности Луны, обусловленный действием приливной силы Земли. Рассмотрим два альтернативных способа его вычисления.

**Способ № 1. Энергетический подход.** Рассмотрим гипотетическую ситуацию в отношении Луны: ради сокращения выкладок будем полагать, что спутник Земли не имеет осевого вращения, и потому, действующая на нее приливообразующая сила Земли практически не зависит от времени. В случае невращающейся Луны, полная потенциальная энергия пробного тела массы  $m$  у поверхности спутника определяется суммой двух слагаемых: энергией поля силы тяжести Луны  $U_g$  и энергией приливной силы Земли  $U_t$ :

$$U_{\text{tot}}(r', \theta) = U_g + U_t = mg\zeta r' - \frac{3}{4}U_0 \left(\frac{r'}{a\zeta}\right)^2 \cos 2\theta. \quad (39)$$

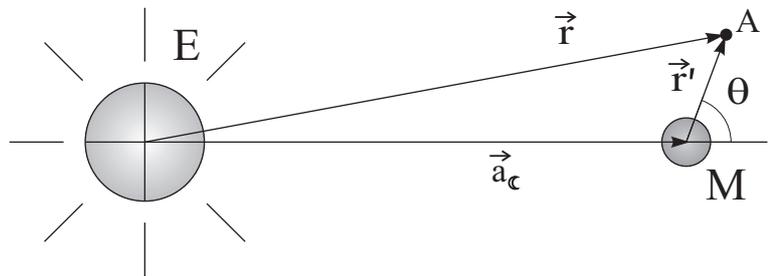
здесь  $U_t$  – потенциальная энергия приливного взаимодействия для пробного тела массы  $m$ , которая определяется (см. например, литературу<sup>1</sup>) выражением вида:

$$U_t = -\frac{3}{4}U_0 \left(\frac{r'}{\Delta_i}\right)^2 \cos 2\theta, \text{ где } U_0 = \frac{G m \mathfrak{M}_i}{\Delta_i}. \quad (40)$$

<sup>1</sup>Бутиков Е.И. Физика океанских приливов в компьютерных моделях. Учебное пособие и методические материалы к комплексу моделирующих программ. – С.-П.: СПбГУ. – 2007. – 16с.

здесь  $r'$  – величина селеноцентрического радиус-вектора пробного тела (см. рис. 9),  $\Delta_i$  – селеноцентрическое расстояние до приливообразующего тела,  $\mathfrak{M}_i$  – его масса ( в нашем случае это Земля ( $\oplus$ )).  $\theta$  – полярный угол, откладываемый от продолжения прямой "приливообразующее тело-Луна".

С использованием явного выражения для приливной силы можно легко убедиться в том, что последняя стремится растянуть сферическое тело



Луны вдоль прямой "приливообразующее тело-Луна" и сдвинуть в направлениях, перпендикулярных к данному.

Рис. 9: к определению параметров  $r'$  и  $\theta$ , задающих выражение для потенциала приливной силы.

В результате этого тело Луны приобретает форму слабо вытянутого эллипсоида, большая полуось которого равна  $a_M = \mathfrak{R}_\zeta + \delta a_\zeta$ , а малая полуось –  $b_M = \mathfrak{R}_\zeta - \delta a_\zeta$ , где  $\mathfrak{R}_\zeta$  – радиус сферического, невозмущенного тела Луны;  $\delta a_\zeta$  – амплитуда статической деформации поверхности Луны, обусловленной действием приливообразующей силы Земли.

Поскольку форма Луны в равновесном состоянии не меняется, то потенциальная энергия  $U_{\text{tot}}$  во всех точках ее поверхности должна быть величиной постоянной. Следовательно, потенциальные энергии в ближайшей к Земле точке поверхности Луны (см. рис. 9) и в точке, лежащей на малой оси, перпендикулярной направлению "приливообразующее тело-Луна" равны между собой

$$U_{\text{tot}}(a_M, \pi) = U_{\text{tot}}(b_M, \pi/2), \Rightarrow$$

$$mg_\zeta a_M - \frac{3}{4}U_0 \left( \frac{a_M^2}{a_\zeta^2} \right) = mg_\zeta b_M + \frac{3}{4}U_0 \left( \frac{b_M^2}{a_\zeta^2} \right), \Rightarrow$$

$$mg_\zeta (a_M - b_M) = \frac{3}{4}U_0 \left( \frac{a_M^2 + b_M^2}{a_\zeta^2} \right), \Rightarrow mg_\zeta \delta a_\zeta \approx \frac{3}{4}U_0 \left( \frac{\mathfrak{R}_\zeta^2}{a_\zeta^2} \right).$$

В последнем выражении  $a_\zeta$  – большая полуось лунной орбиты, определенной относительно центра Земли. Учитывая, что ускорение свободного падения на поверхности Луны есть

$$g_\zeta = \frac{G \mathfrak{M}_\zeta}{\mathfrak{R}_\zeta^2},$$

тогда амплитуда статической деформации поверхности Луны представляется в виде:

$$\delta a_\zeta = \frac{3}{4} \left( \frac{\mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{M}_\zeta} \right) \left( \frac{\mathfrak{R}_\zeta}{a_\zeta} \right)^3 \mathfrak{R}_\zeta = 9.80 \text{ м.} \quad (41)$$

Аналогично рассуждая, можно определить амплитуду статической деформации поверхности Земли, обусловленную приливным действием Луны

$$\delta a_{\oplus} = \frac{3}{4} \left( \frac{\mathfrak{M}_{\zeta}}{\mathfrak{M}_{\oplus}} \right) \left( \frac{R_{\oplus}}{a_{\zeta}} \right)^3 R_{\oplus} = 0.269 \text{ м.} \quad (42)$$

В численных расчетах мы использовали значения параметров, взятые из раздела "Справочные данные". Следовательно,  $\delta a_{\zeta} / \delta a_{\oplus} = 36.4$  раза.

Способ № 2. Динамический подход. Вновь рассмотрим гипотетическую ситуацию невращающейся Луны. При этом приливообразующая сила Земли практически не зависит от времени. В силу квадрупольной симметрии приливообразующих сил (это проявляется в появлении на поверхности Луны двух горбов и двух впадин  $2 \times 2 = 4$  полюса) получается, что поверхность спутника Земли, испытывая статическое искажение, должна принимать форму слабо сплюснутого эллипсоида вращения, уравнение профиля которого в полярных координатах можно представить в виде:

$$r(\theta) = \mathfrak{R}_{\zeta} + \delta a_{\zeta} \cos 2\theta. \quad (43)$$

Здесь  $\delta a_{\zeta}$  – амплитуда статической деформации поверхности Луны, удовлетворяет условию  $\delta a_{\zeta} \ll \mathfrak{R}_{\zeta}$ ;  $\theta$  – полярный угол, определенный в предыдущем подходе. В соответствии с уравнением (43), поверхность Луны образует следующий угол с горизонтом:

$$\alpha = \frac{1}{r} \frac{dr(\theta)}{d\theta} \approx -\frac{2\delta a_{\zeta}}{\mathfrak{R}_{\zeta}} \sin 2\theta. \quad (44)$$

Отсюда следует, что поверхность Земли горизонтальна (т.е.  $\alpha = 0$ ) при  $\theta = 0$  и при  $\theta = 90^\circ$  (в точках  $Z$  и  $A$ ). Угол  $\alpha$  максимален и равен  $(2\delta a_{\zeta})/\mathfrak{R}_{\zeta}$  при  $\theta = 45^\circ$  и при  $\theta = 135^\circ$ , где приливная сила имеет горизонтальное направление. В состоянии равновесия искаженная приливной силой лунная поверхность перпендикулярна линии отвеса. Линия отвеса направлена вдоль векторной суммы силы земного тяготения и приливной силы. Малое отклонение линии отвеса от направления на центр Земли вызвано горизонтальной составляющей ( $F_{hor}$ ) приливной силы. Поэтому угол  $\alpha$  равен отношению  $F_{hor}$  к  $F_{grav} = mg$ . Можно показать (см. литературу<sup>1</sup>), что горизонтальная составляющая приливной силы есть

$$F_{hor} = -\frac{3}{2} F_0 \left( \frac{r'}{\Delta_i} \right) \sin 2\theta, \quad \text{где } F_0 = \frac{G m \mathfrak{M}_i}{\Delta_i^2}.$$

Приравнявая  $\alpha = 2\delta a_{\zeta} / \mathfrak{R}_{\zeta}$ , при  $\theta = 45^\circ$  к  $F_{hor}/F_{grav}$ , получаем для удвоенного значения амплитуды статической деформации поверхности  $2\delta a_{\zeta}$  под действием приливообразующей силы Земли:

$$2\delta a = \frac{3}{2} \left( \frac{\mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{M}_{\zeta}} \right) \left( \frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{a_{\zeta}} \right)^3 \mathfrak{R}_{\zeta},$$

откуда следуют выражения (41), (42).

**Ответ:**  $\delta a_{\zeta} = 9.80$  м;  $\delta a_{\zeta} / \delta a_{\oplus} = 36.4$  раза. ( $S_{\max} = 9$  баллов).

**Задача № 12. «Планеты-гиганты и спутник-"невидимка"»**

**Решение:** Как известно, *сфера Хилла* – это гравитационная сфера небесного тела или поверхность нулевой скорости для пробного тела (движущегося вокруг данного небесного тела), на которой полная механическая энергия пробного тела равна нулю. Выход последнего за пределы данной сферы означает, что он перестает быть, в принципе, спутником данного небесного тела. Следовательно, если пробное тело является спутником классической планеты, то его *орбита должна полностью располагаться внутри сферы Хилла*.

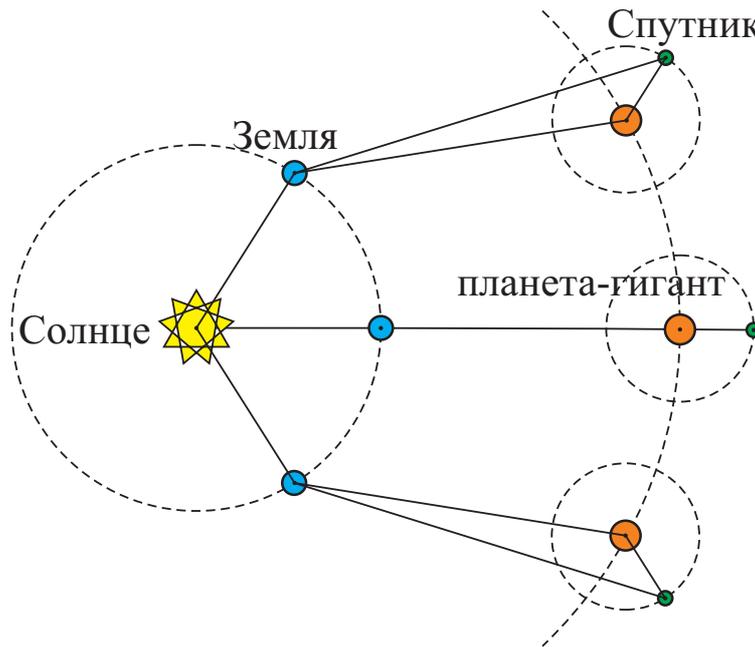


Рис. 10: к определению сидерического периода обращения спутника планеты-гиганта.

Будем полагать, что плоскости орбит Земли, планеты-гиганта и ее спутника совпадают. Если спутник, движущийся по круговой орбите в прямом направлении, который при наблюдении с Земли всегда располагается по другую сторону от Солнца относительно материнской планеты, и во время каждого противостояния последней скрывается от земного наблюдателя, то его сидерический период обращения вокруг материнской планеты равен сидерическому периоду обращения Земли вокруг Солнца (см. рис. 10).

Действительно, противостояние планеты ( $P$ ) с Землей повторяются через синодический период  $S_p$ , определяемый уравнением синодического движения (через сидерические периоды обращения планеты  $T_p$  и Земли  $T_{\oplus}$  вокруг Солнца):

$$\frac{1}{S_p} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_p}, \Rightarrow S_p = \frac{T_{\oplus} T_p}{T_p - T_{\oplus}} \quad (45)$$

Данный период  $S_p$  равен синодическому периоду спутника  $S_s$ , также определяемому посредством аналогичного уравнения (в случае прямого движения

спутника):

$$\frac{1}{S_s} = \frac{1}{T_s} - \frac{1}{T_p}, \Rightarrow S_s = \frac{T_s \cdot T_p}{T_p - T_s} \quad (46)$$

Откуда следует, что

$$T_p = T_{\oplus}.$$

Ретроградное движение спутника при таком условии задачи невозможно. Далее воспользуемся третьим обобщенным законом Кеплера:

$$\frac{(\mathfrak{M}_{\odot} + \mathfrak{M}_{\oplus}) \cdot T_{\oplus}^2}{(\mathfrak{M}_p + \mathfrak{M}_s) \cdot T_s^2} = \frac{a_{\oplus}^3}{a_s^3}, \quad (47)$$

учитывая, что масса Земли ( $\mathfrak{M}_{\oplus}$ ) много меньше массы Солнца ( $\mathfrak{M}_{\odot}$ ), а масса спутника ( $\mathfrak{M}_s$ ) много меньше массы планеты ( $\mathfrak{M}_p$ ), то (47) можно переписать так:

$$\left(\frac{\mathfrak{M}_{\odot}}{\mathfrak{M}_p}\right) \left(\frac{T_{\oplus}^2}{T_s^2}\right) = \frac{a_{\oplus}^3}{a_s^3}, \Rightarrow a_s = a_{\oplus} \left(\frac{\mathfrak{M}_p}{\mathfrak{M}_{\odot}}\right)^{1/3} \left(\frac{T_s}{T_{\oplus}}\right)^{2/3}. \quad (48)$$

В итоге значение радиуса круговой орбиты представляются в виде:

$$a_s = a_{\oplus} \left(\frac{\mathfrak{M}_p}{\mathfrak{M}_{\odot}}\right)^{1/3}. \quad (49)$$

В отношении планет-гигантов их радиус сферы Хилла определяется минимальным возможным значением  $R_{\text{Hill}}$ . В таблице 1 представлены вычисленные по формуле (49) для спутников планет-гигантов значения радиусов круговых орбит. Здесь же представлены радиусы сфер Хилла, обусловленные гравитационным взаимодействием как с Солнцем, так и с планетами-соседками. Из сопоставления результатов следует, что все планеты-гиганты могут иметь такой спутник.

Планета	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	
$a_s$ , млн. км	14.73	9.85	5.26	5.57	
Значения радиуса сферы Хилла (млн. км)					
Массивное тело/ Планета	Солнце	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
Юпитер	<b>51.92</b>	–	–	–	–
Сатурн	<b>64.46</b>	249.55	–	–	–
Уран	<b>69.46</b>	471.99	458.44	–	782.64
Нептун	<b>115.16</b>	882.89	1024.08	830.99	–

Таблица 1: значения радиуса орбиты спутника и радиуса сферы Хилла для планет-гигантов Солнечной системы.

**Ответ:** все планеты-гиганты Солнечной системы могут иметь такой спутник. ( $\$_{\text{max}} = 10$  баллов).

## Уровень «Профи» (уровень С)

### Задача № 13. «Незаходящая Луна и заходящее Солнце»

**Решение:** Как известно, точечное светило является незаходящим, если выполняется условие

$$|\delta| \geq (90^\circ - |\varphi|). \quad (50)$$

Рассмотрим случай северного географического полушария, т.е.  $\varphi > 0$ , причем для незаходящего светила  $\delta > 0$ . Следовательно, в предельном случае (1) запишется в виде:

$$\delta = 90^\circ - \varphi, \Rightarrow \varphi = 90^\circ - \delta.$$

Для истинного Солнца имеем

$$\varphi_{\odot}^{(0)} = 90^\circ - \delta_{\odot}, \quad (51)$$

где  $\delta_{\odot}$  – склонение истинного Солнца. При наблюдении с Земли Солнце имеет конечные размеры, при этом средний угловой радиус Солнца  $\bar{\rho}_{\odot}'' = 16'$ . Чтобы Солнце было незаходящим в данном случае, необходимо чтобы в нижней кульминации верхняя точка диска Солнца располагалась на горизонте. Поскольку ее склонение больше  $\delta_{\odot}$  на  $\bar{\rho}_{\odot}''$ , то широта, с которой Солнце будет являться незаходящим светилом, представляется в виде:

$$\varphi_{\odot}^{(1)} = 90^\circ - (\delta_{\odot} + \bar{\rho}_{\odot}''). \quad (52)$$

Явление рефракции световых волн в атмосфере Земли "приподнимает" все светила, находящиеся на горизонте на величину рефракции  $\delta z = 35'$ , следовательно, искомая широта местности есть

$$\varphi_{\odot}^{(2)} = 90^\circ - \delta_{\odot} - \bar{\rho}_{\odot}'' - \delta z = 65^\circ 43'. \quad (53)$$

Следовательно, при  $\varphi < 65^\circ 43'$  Солнце является всегда восходящим и заходящим светилом. Луна движется по орбите, наклонение которой к плоскости эклиптики равно  $i_{\zeta} = 5^\circ 9'$ . Следовательно, склонение Луны может изменяться в пределах

$$-\varepsilon - i_{\zeta} \leq \delta_a \leq \varepsilon + i_{\zeta}, \text{ или } -28^\circ 35' \leq \delta_{\zeta} \leq +28^\circ 35'.$$

Учитывая, что средний угловой радиус Луны равен  $\bar{\rho}_{\zeta}'' = 16'$ , можно по аналогии с (53), записать формулу для широты местности, начиная с которой Луна бывает незаходящей (по крайней мере 24 часа):

$$\varphi_{\zeta}^{(2)} = 90^\circ - \delta_{\zeta} - \bar{\rho}_{\zeta}'' - \delta z = 60^\circ 34'.$$

Следовательно, для интервала широт  $(60^\circ 34', 65^\circ 43')$  и  $(-65^\circ 43', -60^\circ 34')$ , в случае южного полушария, выполняется условие настоящей задачи.

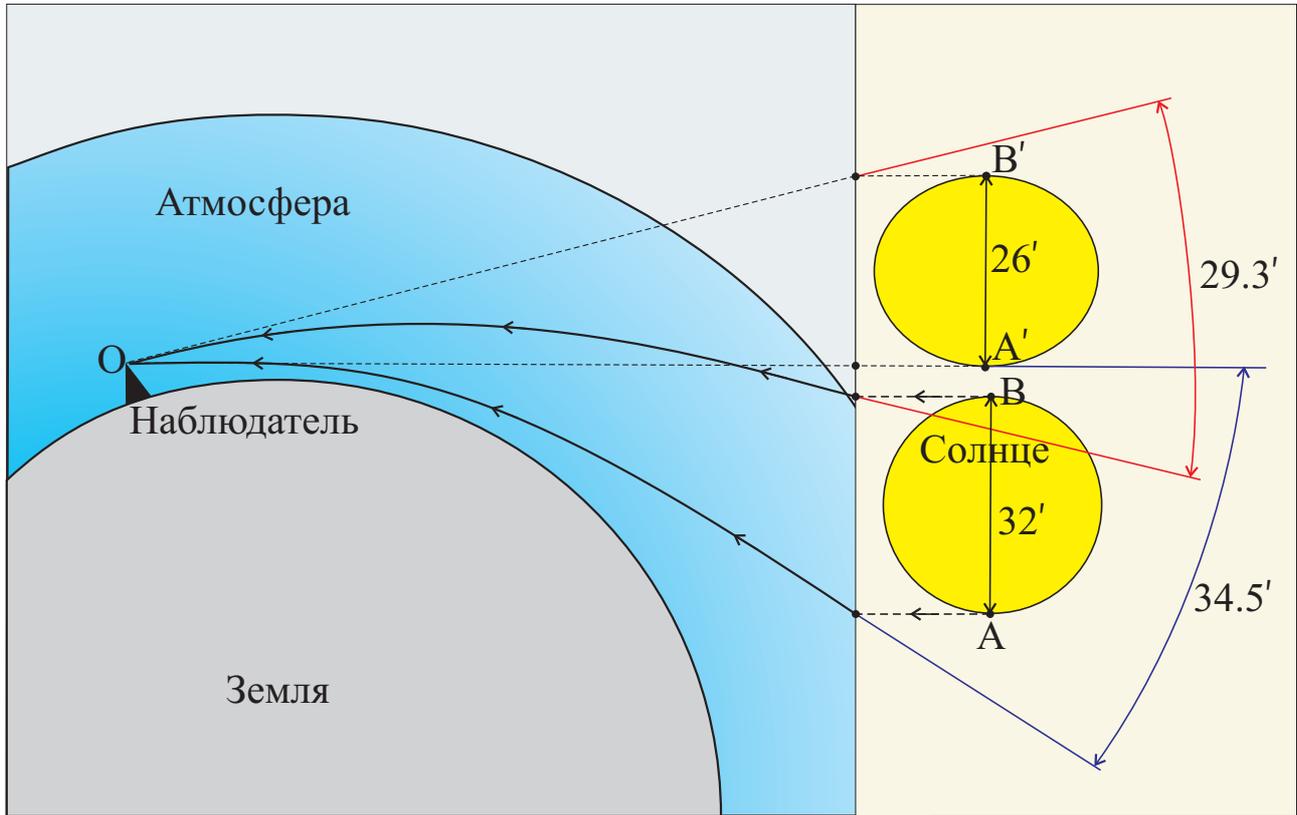


Рис. 11: к определению сжатия видимого диска Солнца у горизонта, в силу атмосферной рефракции.

**Ответ:**  $(-65^{\circ}43', -60^{\circ}34')$  и  $(60^{\circ}34', 65^{\circ}43')$ . ( $S_{\max} = 11$  баллов).

**Задача № 14. «Изменение поверхностной яркости Солнца»**

**Решение.** а) В случае, когда Солнце находится в зените, то земному наблюдателю оно видится круглым диском с угловым диаметром  $D''_{\odot} = 32'$ . Рассмотрим ситуацию, когда земной наблюдатель видит Солнце на горизонте. Если в некоторый момент времени нижняя точка  $A'$  видимого диска Солнца коснулась горизонта, то ее видимая высота  $h_{A'} = 0^{\circ}$  (см. рис. 11). При этом, согласно формуле (2), угол рефракции данной точки есть  $\delta h_A = 34.5'$ . Следовательно, высота нижней точки ( $A$ ) истинного диска Солнца есть

$$h_A = h_{A'} - \delta h_A = -34.5'. \quad (54)$$

Высота верхней точки ( $B$ ) истинного диска Солнца есть

$$h_B = h_A + D''_{\odot} = -2.5'.$$

С использованием формулы (3) можно вычислить угол рефракции для данной точки  $\delta h_B = 29.3'$ . Следовательно, высота верхней точки  $B'$  видимого диска Солнца есть

$$h_{B'} = h_B^{\circ} + \delta h_B = 26.8'. \quad (55)$$

Следовательно, у горизонта видимый диск Солнца представляется сплюснутым вдоль отвесной линии эллипсом с большой осью  $a''_{\odot} = D''_{\odot} = 32'$  и малой осью  $-b''_{\odot} = 26.8'$ .

Полагая, что в направлении наблюдателя Солнце испускает всегда одну и ту же порцию энергии за один и тот же промежуток времени, следовательно, поверхностная яркость Солнца будет изменяться в силу уменьшения площади его видимого диска. Для протяженного объекта **поверхностной яркостью** ( $B$ ) называется освещенность (или соответствующая ей видимая звездная величина), создаваемая единицей угловой площади (в нашем случае – одной квадратной угловой секундой) видимой поверхности данного объекта:

$$B = \frac{E}{S}, \quad (56)$$

$$\text{где } E = E_0 \cdot 10^{-0.4(m-m_0)}, \quad (57)$$

здесь  $E$  – интегральная освещенность, создаваемая данным небесным телом в точке, где находится наблюдатель;  $E_0$  – освещенность, создаваемая там же звездой с звездной величиной  $m_0 = 0^m$ , равная

$$E_0 = 2.48 \cdot 10^{-8} \text{Вт(м)}^2.$$

В (56)  $S$  – угловая площадь поверхности объекта. В случае, когда Солнце представляется круглым диском и эллипсом, соответствующие площади представляются в виде:

$$S_{\odot}^{(Z)} = \frac{\pi D_{\odot}''^2}{4}, \quad S_{\odot}^{(H)} = \frac{\pi a_{\odot}'' \cdot b_{\odot}''}{4}. \quad (58)$$

Следовательно, в случае а) относительное изменение поверхностной яркости Солнца представляется в виде:

$$\eta_B = \frac{B^{(H)} - B^{(Z)}}{B^{(H)}} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{S_{\odot}^{(H)}}{S_{\odot}^{(Z)}}\right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{b_{\odot}''}{a_{\odot}''}\right) \cdot 100\% = 16.3\% \quad (59)$$

**б)** В данном случае мы полагаем, что размер диска Солнца в зените и на горизонте одинаковый, а освещенность должна определяться формулой Кастена-Янга:

$$E^{(Z)} = E_0 P^{M(0)}, \quad E^{(H)} = E_0 P^{M(90^\circ)}$$

Тогда

$$\eta_B = \frac{B^{(Z)} - B^{(H)}}{B^{(Z)}} \cdot 100\% = \left(1 - P^{M(90^\circ) - M(0^\circ)}\right) \cdot 100\% = 99.998\%. \quad (60)$$

в) В данном случае необходимо учесть оба фактора. Очевидно, что поглощение света в атмосфере более значимый фактор, поэтому:

$$\begin{aligned}\eta_B &= \frac{B^{(Z)} - B^{(H)}}{B^{(Z)}} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{S_{\odot}^{(Z)}}{S_{\odot}^{(g)}} \cdot P^{M(90^\circ) - M(0^\circ)}\right) \cdot 100\% = \\ &= \left(1 - \frac{a''_{\odot}}{b''_{\odot}} \cdot P^{M(90^\circ) - M(0^\circ)}\right) \cdot 100\% = 99.997\%.\end{aligned}\quad (61)$$

**Ответ:** а)  $\eta_B = 16.3\%$ ; б)  $\eta_B = 99.998\%$ ; в)  $\eta_B = 99.997\%$  ( $\$_{\max} = 12$  баллов).

### Задача № 15. «Кульминации тройной звезды»

**Решение.** Поскольку все звезды прошли через меридиан одновременно, то их прямые восхождения равны между собой

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3,$$

и равны звездному времени ( $s$ ) в момент кульминации. 23 сентября звездное время на начало суток совпадает с средним солнечным временем, т.е.  $s = 00^{\text{h}}20^{\text{m}}$ . Следовательно,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 00^{\text{h}}20^{\text{m}}.$$

Первая компонента кульминировала к югу от зенита, тогда  $\delta_1 < \varphi$ ; вторая кульминировала точно в зените, тогда  $\delta_2 = \varphi$ ; третья кульминировала к северу от зенита, тогда  $\delta_3 > \varphi$ . Поскольку звезды расположены на одном меридиане, то угловые расстояния между компонентами есть

$$d_{13} = \delta_3 - \delta_1, \quad d_{12} = \delta_2 - \delta_1, \quad d_{32} = \delta_3 - \delta_2.\quad (62)$$

В нижней кульминации, все звезды также пройдут меридиан одновременно, тогда  $h = d_{32}$ . Высоты звезд в нижней кульминации есть

$$\text{для компоненты 1: } -d_{12} = \delta_1 + \varphi - 90^\circ,\quad (63)$$

$$\text{для компоненты 2: } 0 = \delta_2 + \varphi - 90^\circ, \text{ или } 2\varphi = 90^\circ, \Rightarrow \delta_2 = \varphi = 45^\circ,\quad (64)$$

$$\text{для компоненты 3: } h = \delta_3 + \varphi - 90^\circ.\quad (65)$$

С учетом сделанных замечаний систему (62) можно представить в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{12} = \varphi - \delta_1, \\ d_{13} = \delta_3 - \delta_1, \\ h = \delta_3 - \varphi. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = \varphi - d_{12}, \\ \delta_3 = \varphi + h, \\ d_{12} = d_{13} - h, \end{array} \right\}\quad (66)$$

В итоге получаем следующие значения искомым величин  $\delta_1 = 44^\circ 57'$ ,  $\delta_2 = \varphi = 45^\circ$ ,  $\delta_3 = 45^\circ 05'$ . Окончательно имеем следующие экваториальные координаты компонент тройной звезды – ( $\alpha_1 = 00^{\text{h}}20^{\text{m}}$ ,  $\delta_1 = 44^\circ 57'$ ), ( $\alpha_2 = 00^{\text{h}}20^{\text{m}}$ ,  $\delta_2 = 45^\circ 00'$ ), ( $\alpha_3 = 00^{\text{h}}20^{\text{m}}$ ,  $\delta_3 = 45^\circ 05'$ ).

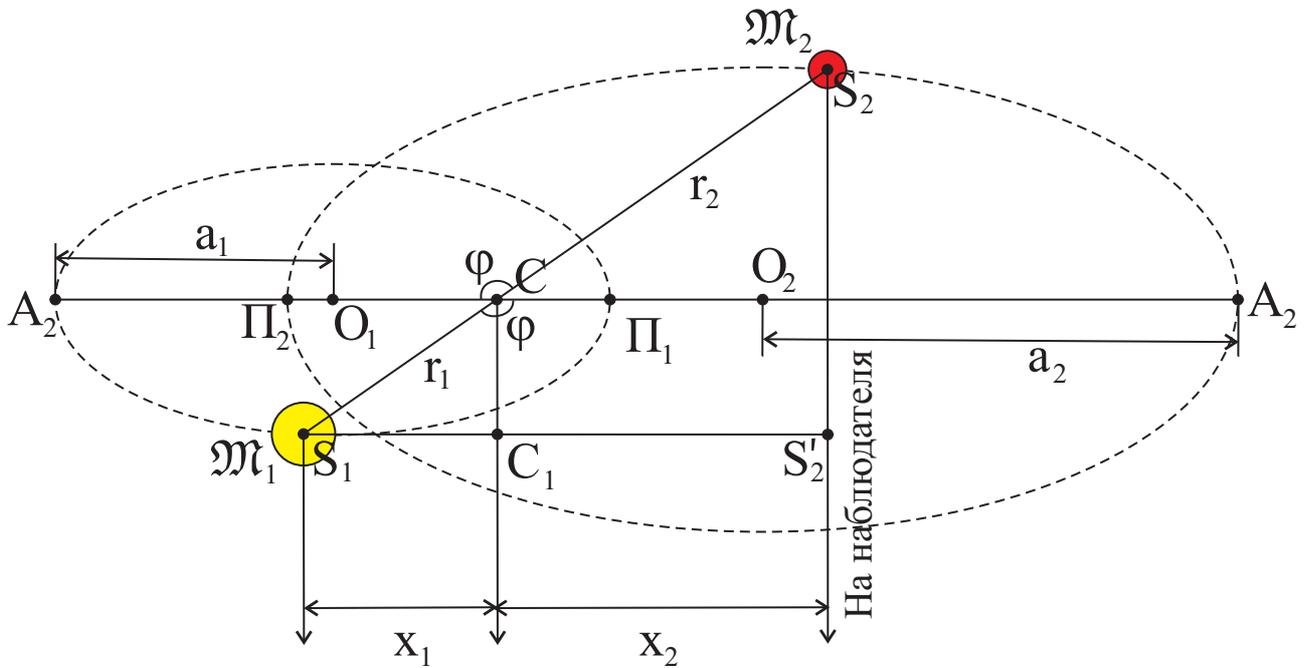


Рис. 12: к определению отношения больших полуосей эллипсов орбит двойной системы.

**Ответ:**  $\varphi = 45^\circ$ ;  $(\alpha_1 = 00^h20^m, \delta_1 = 44^\circ57')$ ,  $(\alpha_2 = 00^h20^m, \delta_2 = 45^\circ00')$ ,  $(\alpha_3 = 00^h20^m, \delta_3 = 45^\circ05')$ . ( $\$_{\max} = 13$  баллов).

**Задача № 16. «Уравнение для масс двух гравитирующих тел»**

**Решение:** Согласно определению, радиус-вектор центра масс двух гравитирующих тел, движущихся вокруг последнего, определяется соотношением вида

$$\vec{R}_c = \frac{\mathcal{M}_1 \vec{r}_1 + \mathcal{M}_2 \vec{r}_2}{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2}, \tag{67}$$

здесь  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  – массы данных тел (рассматриваемых как материальные точки);  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  – их радиусы-векторы.

Перейдем в систему отсчета, связанную с центром масс данной системы тел, тогда  $\vec{R}_c = 0$  и

$$\mathcal{M}_1 \vec{r}_1 + \mathcal{M}_2 \vec{r}_2 = 0, \Rightarrow \mathcal{M}_1 r_1 - \mathcal{M}_2 r_2 = 0, \Rightarrow \frac{\mathcal{M}_2}{\mathcal{M}_1} = \frac{r_1}{r_2}. \tag{68}$$

Т.о. отношение масс компонент двойной системы равно обратному отношению их расстояний от центра масс – точки  $C$  (см. рис. 12).

Как известно, центр масс совпадает с фокусами эллипсов орбит компонент двойной системы, следовательно, указанные расстояния являются одновременно полярными радиусами данных тел. Полярный радиус  $r_i$  удовлетворяет следующему уравнению эллипса, представленному в виде функции полярного угла  $\varphi_i$ :

$$r_i = \frac{p_i}{1 + \varepsilon_i \cos \varphi_i}, \text{ где } i = \overline{1, 2}. \tag{69}$$

здесь  $p_i$  – фокальный параметр орбиты  $i$ -го тела;  $\varepsilon_i$  – эксцентриситет его орбиты. Очевидно, здесь полярный угол отсчитывается от **перигелия** ( $\Pi_i$ ) –

ближайшей точки орбиты к ее фокусу. Поскольку перицентры орбит лежат на одной прямой, по разную сторону от точки  $C$ , то полярные углы данных тел в любой момент времени равны между собой:  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ .

Из формулы (69) следует, что расстояния от центра масс до перицентра ( $P_i$ ) и апоцентра ( $A_i$ ) орбиты  $i$ -го тела определяется выражениями вида:

$$q_i = a_i(1 - \varepsilon_i), \quad Q_i = a_i(1 + \varepsilon_i), \quad (70)$$

При этом данные тела достигают данные точки своих орбит одновременно (поскольку всегда должны быть расположены на прямой, проходящей через точку  $C$  – следствие того факта, что гравитационные силы являются центральными). Тогда из выражений (68), (70) следует, что

$$\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{Q_1}{Q_2}, \Rightarrow \frac{a_1(1 - \varepsilon_1)}{a_2(1 - \varepsilon_2)} = \frac{a_1(1 + \varepsilon_1)}{a_2(1 + \varepsilon_2)}, \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon. \quad (71)$$

В итоге из (71) следует, что

$$\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

что и требовалось доказать. ( $\$_{\max} = 13$  баллов).

### **Задача № 17. « Критическая светимость и предельная масса звезды »**

**Решение.** Как известно, *пределом Эддингтона* называется максимально допустимое значение светимости звезды ( $L_{\max}$ ), при котором сила давления электромагнитного излучения, исходящего из недр звезды равна весу вышележащих слоев звезды, окружающих зону термоядерных реакций. Т.о. при данном значении  $L_{\max}$  звезда еще находится в состоянии равновесия. При  $L > L_{\max}$  звезда является нестабильной физической системой и является мощным источником звездного ветра.

Определим явное выражение для  $L_{\max}$ . Для этого учтем что все звезды состоят из *водородной плазмы*, где основным носителем массы является *протон*. Звездная плазма является *квазинейтральной*, поэтому на каждый протон приходится один электрон. Сила притяжения, действующая со стороны звезды на протон, находящийся на расстоянии  $r$  от центра звезды определяется законом всемирного тяготения:

$$F_{\text{at}} = \frac{G m_p \mathfrak{M}_*}{r^2}, \quad (72)$$

где  $G$  – универсальная гравитационная постоянная,  $m_p$  – масса протона,  $\mathfrak{M}_*$  – масса части звезды, находящейся внутри сферы радиуса  $r$ , центр которой совпадает с центром звезды. Сила давления электромагнитного излучения звезды, действующая на электрон, находящийся в паре с указанным протоном

есть

$$F_p = \frac{j(r)}{c} \cdot \sigma_T, \quad (73)$$

где  $j(r)$  – плотность энергетического потока электромагнитных волн на расстоянии  $r$  от центра звезды, определяемая выражением

$$j(r) = \frac{L}{4\pi r^2}, \quad (74)$$

здесь  $L$  – светимость звезды на расстоянии  $r$  от ее центра. В выражении (73)  $\sigma_T$  – томсоновское сечение рассеяния фотона на электроны, определяемое выражением вида

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \cdot \left( \frac{k e^2}{m_e c^2} \right)^2, \quad (75)$$

здесь  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$  Н·м<sup>2</sup>/Кл<sup>2</sup> – постоянная Кулона;  $e$  – заряд электрона,  $m_e$  – масса электрона,  $c$  – скорость света. Требуя выполнения равенства сил  $F_{at}$  и  $F_p$ , и учитывая, что электростатическое взаимодействие между электроном и протоном значительно сильнее гравитационного (т. е. протон-электронные пары можно считать связанными частицами), в результате получаем:

$$\frac{G m_p \mathfrak{M}_*}{r^2} = \frac{L_{Edd}}{4\pi r^2 c} \cdot \sigma_T, \Rightarrow L_{Edd} = \frac{4\pi G m_p \mathfrak{M}_* c}{\sigma_T} \quad (76)$$

или

$$L_{Edd} = \frac{3 G m_p m_e^2 c^5}{2 k^2 e^4} \cdot \mathfrak{M}_* = A \left( \frac{\mathfrak{M}_*}{\mathfrak{M}_\odot} \right), \quad (77)$$

где

$$A = \frac{3 G m_p m_e^2 c^5}{2 k^2 e^4} \cdot \mathfrak{M}_\odot = 1.265 \cdot 10^{31} \text{ Вт} = 33050 L_\odot.$$

Определим максимально допустимую массу звезды. Для этого воспользуемся формулой для светимости звезды

$$L = 4\pi \mathfrak{R}_*^2 \sigma T_{*s}^4, \quad (78)$$

где  $\mathfrak{R}_*$  – радиус звезды,  $T_{*s}$  – температура поверхности звезды. Далее воспользуемся *теоремой о вириале*:

$$E_k = -\frac{1}{2} \cdot U_p, \quad (79)$$

где

$$E_k = \frac{3}{2} \cdot N k \bar{T}_* \quad (80)$$

$E_k$  – кинетическая энергия звезды;  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана;  $N$  – число частиц, формирующих тело звезды;  $\bar{T}_*$  – средняя (по объему) температура звезды.

$$U_p = -\frac{3 G \mathfrak{M}_*^2}{5 \mathfrak{R}_*} \quad (81)$$

является гравитационной потенциальной энергией звезды (в приближении однородного шара). Из выражений (80) и (81) следует, что

$$\frac{3}{2} N k \bar{T}_* = \frac{3}{10} \frac{G \mathfrak{M}_*^2}{\mathfrak{R}_*}, \Rightarrow \frac{N \cdot m_0}{N_A \cdot m_0} (N_A k) \bar{T}_* = \frac{1}{5} \frac{G \mathfrak{M}_*^2}{\mathfrak{R}_*}, \Rightarrow$$

$$\frac{\mathfrak{M}_*}{\mu_*} R \bar{T}_* = \frac{1}{5} \frac{G \mathfrak{M}_*^2}{\mathfrak{R}_*}, \Rightarrow \bar{T}_* = \frac{\mu_*}{5} \frac{G \mathfrak{M}_*}{\mathfrak{R}_* R}. \quad (82)$$

В последнем выражении  $R = 8.31$  Дж/(кг·моль) – универсальная газовая постоянная;  $\mu_*$  – молярная масса звездной плазмы.

Далее установим связь между температурами  $T_{*s}$  и  $\bar{T}_*$ . Для это учтем, что в недрах звезды температура плазмы является высокой, и потому плазма преимущественно ионизована. Здесь излучение свободно проходит сквозь плазму. У поверхности звезды ионы активно поглощают, идущие из недр звезды фотоны и переизлучают их. Данные процессы повторяются многократно. Именно потому фотоны очень медленно пробираются из недр звезды на ее периферию. Оценим время, необходимое для выхода излучения из тела звезды. Пусть фотон за время  $t$  совершил  $N$  перемещений  $\{\vec{r}_i\}$ , тогда полное перемещение есть

$$\vec{D} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i. \quad (83)$$

Квадрат модуля  $D$  можно представить в виде:

$$D^2 = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_N^2 + 2(\vec{r}_1 \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \vec{r}_3 + \dots). \quad (84)$$

Сколярные произведения векторов расписываются как

$$\vec{r}_i \vec{r}_j = r_i r_j \cos \alpha_{ij}.$$

Ради простоты вычислений будем далее полагать, что  $r_1 = r_2 = r_s = \dots = r_N = r$ . При суммировании большого количества слагаемых в круглых скобках в (84), последняя будет стремиться к нулю, в силу изотропности (одинаковой вероятности перемещений в различных направлениях) движения фотона, тогда

$$D^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_N^2 = N \cdot r^2. \quad (85)$$

Следовательно, чтобы фотон (излучение) покинул тело звезды, ему нужно испытать следующее количество столкновений:

$$N_* = \frac{\mathfrak{R}_*^2}{r^2} \quad (86)$$

При этом потребуется время

$$t_* = \frac{N_* r}{c} = \frac{\mathfrak{R}_*^2}{r_* c}. \quad (87)$$

Время, необходимое для прохождения излучения без переизлучения, составляет

$$t_0 = \frac{\mathfrak{R}_*}{c}, \Rightarrow \frac{t_*}{t_0} = \frac{\mathfrak{R}_*}{r}. \quad (88)$$

Следовательно, интегральную светимость единицы поверхности звезды и ее недр можно записать в виде (закон Стефана-Больцмана):

$$\mu_I = \frac{\Delta E}{S \cdot t_0} = \sigma \bar{T}_*^4, \quad \mu_s = \frac{\Delta E}{S \cdot t_*} = \sigma T_{*s}^4, \Rightarrow$$

откуда следует, что

$$\frac{t_*}{t_0} = \left( \frac{\bar{T}_*}{T_{*s}} \right)^4, \Rightarrow T_{*s} = \bar{T}_* \left( \frac{r}{\mathfrak{R}_*} \right)^{1/4}. \quad (89)$$

С использованием выражений (82) и (89) получаем следующую формулу для  $T_{*s}$ :

$$T_{*s} = \frac{1}{5} \left( \frac{r}{\mathfrak{R}_*} \right)^{1/4} \frac{\mu_* G \mathfrak{M}_*}{R \cdot \mathfrak{R}_*} \quad (90)$$

Подставляя (90) в (78) имеем

$$L_* = 4\pi \mathfrak{R}_*^2 \sigma \left( \frac{r^{1/4} \mu_* G \mathfrak{M}_*}{5 \cdot R \cdot \mathfrak{R}_*^{5/4}} \right)^4 = \frac{4\pi r \sigma \mu_*^4 G^4 \mathfrak{M}_*^4}{625 R^4 \mathfrak{R}_*^3}. \quad (91)$$

Принимая во внимание, что

$$\mathfrak{M}_* = \frac{4\pi}{3} \rho_* \mathfrak{R}_*^3, \Rightarrow \mathfrak{R}_*^3 = \frac{3 \mathfrak{M}_*}{4\pi \rho_*}. \quad (92)$$

В итоге

$$L_* = \frac{16\pi^2}{1875} \frac{r \sigma \mu_*^4 G^4 \rho_* \mathfrak{M}_*^3}{R^4}$$

или

$$L_* = B \cdot \mathfrak{M}_*^3, \quad \text{где } B = \frac{16\pi^2}{1875} \frac{r \sigma \mu_*^4 G^4 \rho_*}{R^4}. \quad (93)$$

Тогда для звезды и Солнца можно записать

$$L_* = B \cdot \mathfrak{M}_*^3, \quad L_\odot = B \cdot \mathfrak{M}_\odot^3, \Rightarrow L_* = L_\odot \left( \frac{\mathfrak{M}_*}{\mathfrak{M}_\odot} \right)^3. \quad (94)$$

При записи последнего выражения мы принимали во внимание, что средняя плотность большинства стационарных звезд незначительно отличается от плотности воды, и потому данный параметр можно считать постоянной величиной. Из (77) и (94) следует, что

$$A \left( \frac{\mathfrak{M}_*}{\mathfrak{M}_\odot} \right) = L_\odot \left( \frac{\mathfrak{M}_*}{\mathfrak{M}_\odot} \right)^3, \Rightarrow \frac{\mathfrak{M}_*}{\mathfrak{M}_\odot} = \sqrt[3]{\frac{A}{L_\odot}} = 182, \Rightarrow$$

$$\mathfrak{M}_{*\max} = 182 \mathfrak{M}_{\odot}, \quad L_{Edd} = 6.01 \cdot 10^6 L_{\odot}. \quad (95)$$

**Ответ:** к задаче представляется выражениями (77) и (95). ( $\mathfrak{S}_{\max} = 14$  баллов).

**Задача № 18. «Некоторые свойства двойной звезды Сириус»**

**Решение. 1.** На рис. 3 изображены траектории видимого движения компонент двойной звезды Сириус и их центра масс (прямая линия). Из рисунка видно, что движение компонент периодическое (повторяются формы описываемых траекторий). Следовательно, **период обращения** – это промежуток времени между двумя последовательными моментами, отвечающими одинаковым взаимными расположениям звезд. Например, такими моментами времени являются 1910 и 1960 год. Следовательно, период обращения системы вокруг их общего центра масс равен  $T_S = 50$  лет.

**2.** С использованием рис. 3 определяем видимые расстояния  $x_1$  и  $x_2$  компонент системы относительно центра масс на указанные даты. Результаты измерений представлены в таблице 2 (Ваши значения  $x_1$  и  $x_2$  могут отличаться от представленных в таблице 1).

Дата	1900	1910	1920	1930	1950	1960	1970	1980
$x_1$ , мм	4.0	6.0	7.5	9.5	3.0	6.5	9.0	8.5
$x_2$ , мм	8.5	14.0	17.5	19.0	7.5	14.5	19.0	16.0
$x_1/x_2$ , мм	0.4706	0.4283	0.4286	0.5000	0.4000	0.4483	0.4737	0.5313
$\langle x_1/x_2 \rangle$ , мм	0.4601							

Таблица 2: данные измерений расстояний  $x_i$  и вычисленные значения отношения  $x_1/x_2$ .

Рассмотрим расположение компонент на эллиптических орбитах (см. рис. 12). Нетрудно видеть, что между видимыми расстояниями  $x_1$  и  $x_2$  компонент двойной звезды относительно центра масс и их полярными расстояниями  $r_1$  и  $r_2$  можно установить однозначную связь. Действительно, треугольники  $\triangle S_1 C C_1$  и  $\triangle S_1 S_2 S'_2$  являются подобными, следовательно, для них справедливо отношение сторон:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

С другой стороны, в рамках задачи № 16 настоящего релиза было показано, что отношение полярных расстояний  $r_1$  и  $r_2$  равно отношению больших полуосей  $a_1$  и  $a_2$  эллиптических орбит данных звезд. Следовательно, в нашем случае

$$\left\langle \frac{x_1}{x_2} \right\rangle = \frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1}{a_2} = 0.460 = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}. \quad (96)$$

здесь,  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$  – массы компонент «Сириус А» и «Сириус В» соответственно.

3. Согласно третьему обобщенному закону Кеплера для двух пар тел «Сириус-А-В» и «Солнце-Земля» можно записать третий обобщенный закон Кеплера:

$$\frac{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)T_S^2}{(\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_\oplus)T_\oplus^2} = \frac{a_S^3}{a_\oplus^3} \quad (97)$$

где  $\mathfrak{M}_\odot$ ,  $\mathfrak{M}_\oplus$  – массы Солнца и Земли соответственно,  $T_\oplus$  – период обращения Земли вокруг Солнца,  $a_S$ ,  $a_\oplus$  – большие полуоси орбит относительного движения «Сириуса В» относительно главной компоненты и Земли относительно Солнца. Учитывая что  $\mathfrak{M}_\odot \gg \mathfrak{M}_\oplus$ , и

$$[\mathfrak{M}_1] = [\mathfrak{M}_2] = \mathfrak{M}_\odot, \quad [T_S] = T_\oplus = \text{год}, \quad [a_S] = a_\oplus = \text{а.е.}$$

Следовательно, уравнение (97) можно записать в виде:

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \frac{a_S^3}{T_S^2}. \quad (98)$$

Большую полуось  $a_S$  можно представить в виде:

$$a_S = a'' \cdot r_S = \frac{a''}{\pi''} = 20.212 \text{ а.е.}, \quad (99)$$

где  $r_S$  – расстояние до Сириуса в парсеках. В результате получаем два уравнения с двумя неизвестными:

$$\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} = 0.4601, \quad \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = 3.303 \mathfrak{M}_\odot. \quad (100)$$

откуда следует, что

$$\mathfrak{M}_1 = 2.26 \mathfrak{M}_\odot, \quad \mathfrak{M}_2 = 1.04 \mathfrak{M}_\odot. \quad (101)$$

Отметим, что наибольшее точные оценки масс компонент ( $\mathfrak{M}_1 = 2.10 \mathfrak{M}_\odot$ ,  $\mathfrak{M}_2 = 0.98 \mathfrak{M}_\odot$ ), полученные профессионалами, близки к нашим результатам.

4. Вычислим абсолютные визуальные звездные величины компонент двойной системы по формулам:

$$M_{V1} = m_1 + 5 + 5 \lg \pi'' = 1.45^m, \quad M_{V2} = m_2 + 5 + 5 \lg \pi'' = 11.48^m. \quad (102)$$

5. По таблице приложения А.10 определяем болометрические поправки для данных компонент:

$$\Delta M_{b1} = -0.72^m, \quad \Delta M_{b2} = -0.31^m.$$

Следовательно, болометрические абсолютные звездные величины:

$$M_{b1} = M_{V1} + \Delta M_{b1} = 0.73^m, \quad M_{b2} = M_{V2} + \Delta M_{b2} = 11.17^m. \quad (103)$$

Светимости звезд определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= L_{\odot} 10^{0.4(M_{b\odot}-M_{b1})} = 40.2 L_{\odot}, \\ L_2 &= L_{\odot} 10^{0.4(M_{b\odot}-M_{b2})} = 2.68 \cdot 10^{-3} L_{\odot}. \end{aligned} \right\}, \quad (104)$$

где  $M_{b\odot} = 4.74^m$  – абсолютная болометрическая звездная величина Солнца.

6. Определим массовую плотность компонент

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\mathfrak{M}_1}{\frac{4}{3}\pi \mathfrak{R}_1^3} = 0.451 \cdot \rho_{\odot} = 636 \text{ кг/м}^3, \\ \rho_2 &= \frac{\mathfrak{M}_2}{\frac{4}{3}\pi \mathfrak{R}_2^3} = 1.755 \cdot 10^6 \cdot \rho_{\odot} = 2.47 \cdot 10^9 \text{ кг/м}^3 \end{aligned} \right\}. \quad (105)$$

где  $\rho_{\odot} = 1410 \text{ кг/м}^3$  – средняя массовая плотность Солнца.

Очевидно, что средняя массовая плотность компонента «Сириус В» является аномально высокой. Это объясняется тем, что данная звезда является белым карликом, основу которой составляет вырожденный газ из полностью ионизованной звездной гелиевой (кислородной или углеродной) плазмы.

**Вырожденным газом** называется квантовый газ из частиц, среднее расстояние между которыми сопоставимо с их дебройлевской длиной волны. Величина последней при температуре звездной плазмы есть  $\lambda_D \sim 10^{-12}$  м. Среднее расстояние между атомами вещества  $\bar{\ell} \sim 10^{-10}$  м. Следовательно,  $\bar{\ell}/\lambda_D \sim 10^2$ , а плотность плазмы в  $(\bar{\ell}/\lambda_D)^3 = 10^6$  раз больше плотности обычной материи, величина которой порядка  $\bar{\rho} \sim 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Следовательно, плотность белых карликов должна быть пропорциональна  $\left(\frac{\bar{\ell}}{\lambda_D}\right)^3 \cdot \bar{\rho} \sim 10^9 \text{ (кг/м}^3)$ , что и объясняет указанный факт.

**Ответ:** к задаче представлен выражениями (96), (101) (102), (103), (104), (105); период обращения системы –  $T_S = 50$  лет; высокая массовая плотность компонента «Сириус В» обусловлена физикой вырожденного газа, из которого состоит белый карлик. ( $\$_{\max} = 15$  баллов).

---

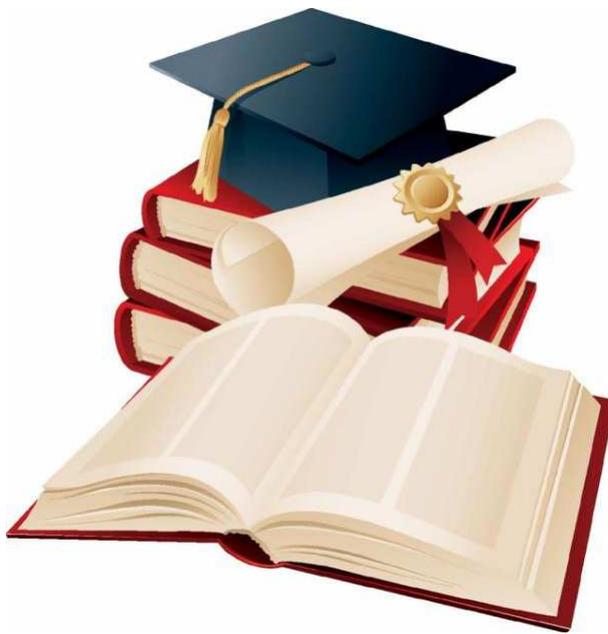
---

---

# СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ

---

---



## А.1. Основные физические и астрономические постоянные

- Гравитационная постоянная –  $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
- Скорость света в вакууме –  $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Универсальная газовая постоянная –  $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
- Постоянная Стефана-Больцмана –  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$
- Постоянная Авогадро –  $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
- Масса протона –  $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Масса электрона –  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Астрономическая единица –  $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
- Парсек –  $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
- Постоянная Хаббла –  $H = 72 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$

## А.2. Данные о Солнце

- Радиус –  $6.955 \cdot 10^5 \text{ км}$
- Масса –  $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
- Светимость –  $3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
- Спектральный класс – G2
- Видимая звездная величина –  $-26.74^m$
- Абсолютная болометрическая звездная величина –  $+4.83^m$
- Показатель цвета (B-V) –  $+0.67^m$
- Эффективная температура –  $5778 \text{ К}$
- Средний горизонтальный параллакс –  $8.794''$
- Солнечная постоянная (во всем спектре) на расстоянии Земли –  $1361 \text{ Вт/м}^2$
- Солнечная постоянная (в видимом свете) на расстоянии Земли –  $600 \text{ Вт/м}^2$

## А.3. Данные о Земле

- Эксцентриситет орбиты –  $0.017$
- Тропический год –  $365.24219 \text{ сут}$
- Средняя орбитальная скорость –  $29.8 \text{ км/с}$
- Период вращения –  $23 \text{ часа } 56 \text{ минут } 04 \text{ секунды}$
- Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0 –  $23^\circ 26' 21.45''$

- Средний по объему радиус – 6371.0 км
- Средний экваториальный радиус – 6378.14 км
- Длина земного меридиана – 20004.276 км
- Полярный радиус – 6356.77 км
- Масса –  $5.974 \cdot 10^{24}$  кг
- Средняя плотность –  $5.52 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Объемный состав атмосферы –  $\text{N}_2$  (78%),  $\text{O}_2$  (21%), Ar ( $\sim 1\%$ )

#### А.4. Данные о Луне

- Среднее расстояние от Земли – 384400 км
- Минимальное расстояние от Земли – 356410 км
- Максимальное расстояние от Земли – 406700 км
- Эксцентриситет орбиты – 0.055
- Наклон плоскости орбиты к эклиптике –  $5^\circ 09'$
- Сидерический (звездный) период обращения – 27.321662 сут
- Синодический период обращения – 29.530589 сут
- Радиус – 1738 км
- Масса –  $7.348 \cdot 10^{22}$  кг или  $1/81.3$  массы Земли
- Средняя плотность –  $3.34 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$
- Визуальное геометрическое альbedo – 0.12
- Видимая звездная величина в полнолуние –  $-12.7^m$

#### А.5. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \text{tg } x \approx x;$$

$$\sin(x \pm \alpha) \approx \sin \alpha \pm x \cos \alpha;$$

$$\cos(x \pm \alpha) \approx \cos \alpha \mp x \sin \alpha;$$

$$\text{tg}(x \pm \alpha) \approx \text{tg } \alpha \pm \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n x;$$

здесь  $x \ll 1$ , все углы выражаются в радианах.

## А.6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн. км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

## А.7. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695500	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	$-26.8^m$
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	$-0.1$
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут <sup>†</sup>	177.36	0.65	$-4.4^m$
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	$-2.0^m$
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	$-2.7^m$
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	$0.4^m$
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час <sup>†</sup>	97.86	0.51	$5.7^m$
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	$7.8^m$

\* для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

## А.8. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	км	г·см <sup>-3</sup>	км	сут		
<b>Земля</b>							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
<b>Марс</b>							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~ 10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~ 6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
<b>Юпитер</b>							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
<b>Сатурн</b>							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.20	~ 11.0
<b>Уран</b>							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
<b>Нептун</b>							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685 <sup>†</sup>	0.7	13.5

\* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет;

† – обратное вращение.

## А.9. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике

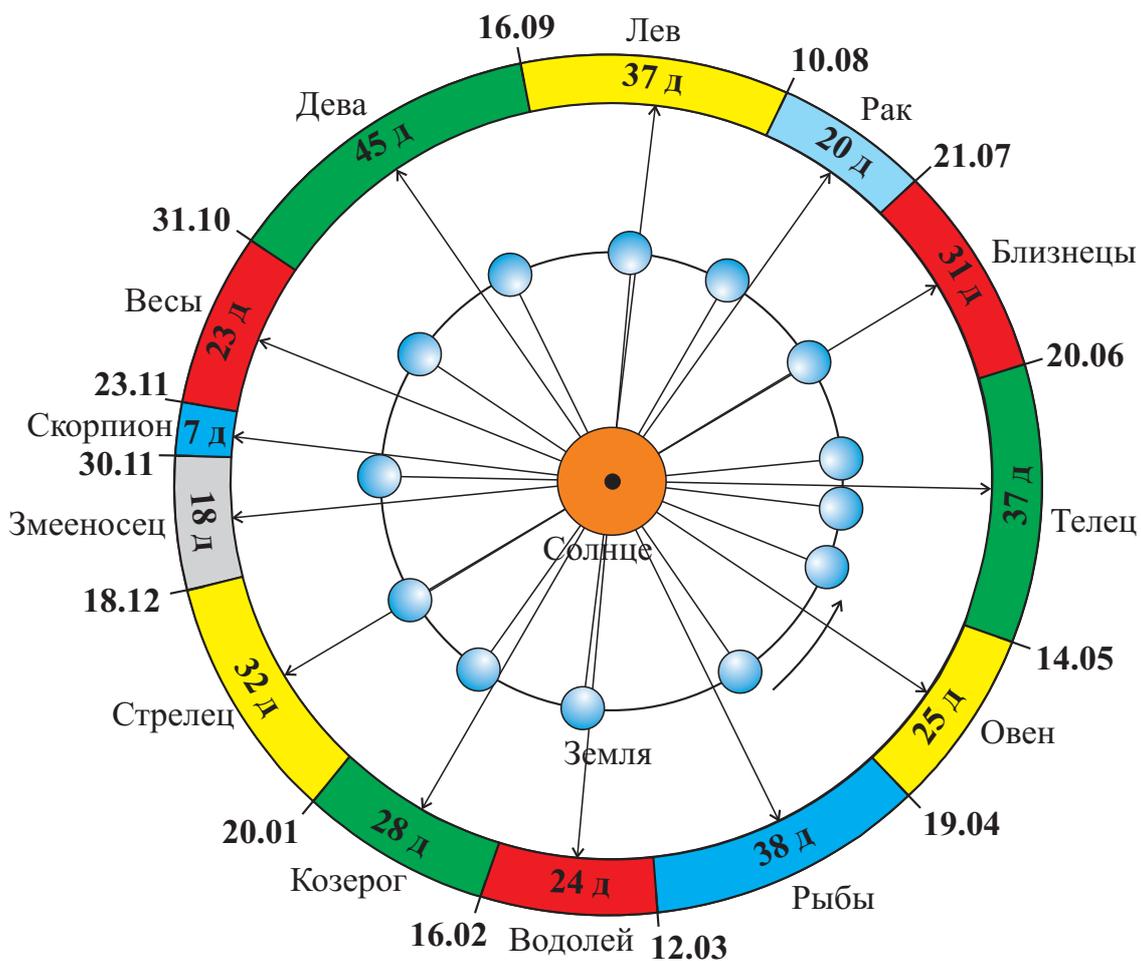


Рис. А.1. Диаграмма видимого годичного движения Солнца по эклиптике.

## А.10. Некоторые характеристики звезд

### Болометрические поправки $\Delta M_b$

Спектр	$\Delta M_b$	Спектр	$\Delta M_b$		
			Гл. последовательность	Гиганты	Сверхгиганты
B0	- 2.70	F5	- 0.04	- 0.08	- 0.12
B5	- 1.58	F8	- 0.05	- 0.17	- 0.28
A0	- 0.72	G0	- 0.06	- 0.25	- 0.42
A5	- 0.31	G2	- 0.07	- 0.31	- 0.52
F0	- 0.09	G5	- 0.10	- 0.39	- 0.65
F2	- 0.04	G8	- 0.10	- 0.47	- 0.80
		K0	- 0.11	- 0.54	- 0.93
		K2	- 0.15	- 0.72	- 1.20
		K3	- 0.31	- 0.89	- 1.35
		K4	- 0.55	- 1.11	- 1.56
		K5	- 0.85	- 1.35	- 1.86
		M0	- 1.43	- 1.55	- 2.2
		M1	- 1.70	- 1.72	- 2.6
		M2	- 2.03	- 1.95	- 3.0
		M3	- 2.35	- 2.26	- 3.6
		M4	- 2.7	- 2.72	- 3.8
		M5	- 3.1	- 3.4	- 4.0